

Válasszuk koordináta-rendszerünk tengelyeinek a CB , CA egyeneseket és legyenek a koordináták $A(0, a)$, $B(b, 0)$, így $D(b/2, 0)$, az AD egyenes tetszőleges pontja $E(\lambda b/2, (1 - \lambda)a)$, ahol λ tetszőleges valós szám, a CE egyenes egyenlete pedig

$$y = \frac{2(1 - \lambda)a}{\lambda b} x,$$

hacsak $\lambda \neq 0$, azaz ha E nem azonos A -val; ezt egyelőre feltesszük. Másrészt az AB egyenes egyenlete

$$x/b + y/a = 1,$$

és így az F metszéspont abszcisszája

$$(1) \quad x_0 = \lambda b / (2 - \lambda),$$

ha $\lambda \neq 2$. A $\lambda = 2$ esetben E a $(b, -a)$ pontban, A -nak D -re való tükröképében van, CE párhuzamos AB -vel, F nem jön létre és persze G sem.

A BE egyenes egyenlete

$$y = \frac{2(1 - \lambda)a}{b(\lambda - 2)} (x - b),$$

és a szerkesztés szerint G ennek az (1) abszcisszájú pontja, tehát ordinátája

$$y_0 = 4a \left(\frac{1 - \lambda}{2 - \lambda} \right)^2,$$

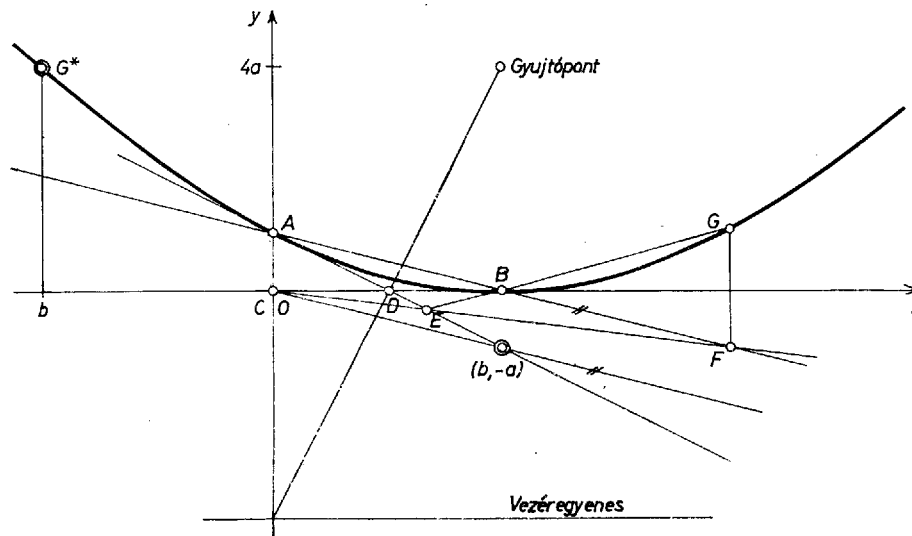
és innen (1) alapján

$$(1') \quad \lambda = 2x_0 / (x_0 + b) \quad (x_0 \neq -b)$$

kiküszöbölésével G koordinátái között a következő összefüggés adódik:

$$(2) \quad y_0 = \frac{a}{b^2} (x_0 - b)^2.$$

Ez az összefüggés a fent kihagyott $\lambda = 0$ esetben is érvényes, hiszen akkor E -n kívül F és G is A -ban adódik, és A koordinátaival teljesül (2). Azt kaptuk tehát, hogy az egyetlen $(b, -a)$ pont kivételével az AD egyenes minden pontjához tartozik az előírás szerint szerkesztett G pont, és ennek koordinátáira mindig teljesül (2). Ez az összefüggés parabola egyenlete, melynek csúcsa a B pont, csúcserintője a BC egyenes és a parabola egy pontja A . (Könnyű belátni azt is, hogy a parabola fókusza a B -ben BC -re és D -ben DA -ra emelt merőlegesek metszéspontja.)



Fordítva, meg kell vizsgálnunk, hogy a (2) parabola mely pontjai tartoznak hozzá a keresett mértani helyhez. Legyen $G(x_0, y_0)$ olyan pont, melyre teljesül (2). Ez csak az (1')-ből adódó λ -értékhez tartozó E pontból származhat, és E -ből a fentiek szerint valóban visszakapjuk G -t, hacsak $x_0 \neq -b$, hiszen (1') értéke nem lehet 2. A parabolának tehát csak az $x_0 = -b$ abszcisszáján levő $G^*(-b, 4a)$ pontja nem tartozik hozzá a keresett mértani helyhez, más szóval: a mértani helyet a (2) parabolából úgy kapjuk, hogy elhagyjuk belőle a G^* pontot.

Megjegyzés. Megoldható a feladat a projektív geometria ¹ tételei alapján is.

¹Lásd pl.: Vigassy Lajos: Geometriai transzformációk, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1963.