Az abszolút érték jelet y és z kifejezésében elhagyhatjuk, hiszen egy számnak és a (-1)-szeresének ugyanazok a számok az osztói. („Szám"-on megoldásunk során csak egész számokat értünk.)

Láttuk,[1] hogy az (1) számnégyesre teljesül

$$x^2+y^2+z^2=u^2,$$

eszerint akkor és csak akkor van 1-nél nagyobb közös osztójuk, ha közülük bármelyik háromnak van. Elég tehát kizárni annak lehetőségét, hogy az (1) közül választott két szám közös osztója egyszersmind a további két szám egyikének is osztója legyen. Könnyű belátni, hogy ennek szükséges feltétele: m, n, p és q-nak ne legyen 1-nél nagyobb r közös osztója, különben r^2 az (1) számok közös osztója lenne. Ez a feltétel azonban nem elegendő, pl. $m=7$, $n=4$, $p=2$, $q=4$ esetén számaink 60, 40, 45, 85 és közös osztójuk 5 (viszont p és q értékét felcserélve nincs közös osztó).

x és y páros, ezért u-nak páratlannak kell lennie, vagyis m^2, n^2, p^2 és q^2 közül egynek vagy háromnak páratlannak kell lennie. Ekkor $m^2+n^2=M$ és $p^2+q^2=P=u-M$ ellentétes párosságúak. M és P legnagyobb közös osztóját D-vel jelölve ugyanez a legnagyobb közös osztója $z=M-P$-nek és $u=M+P$-nek, és ekkor z és u minden közös osztója a D-nek osztója. Eszerint a feladat követelménye akkor és csak akkor teljesül, ha D-nek és pl. x-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Mivel D páratlan, elég vizsgálni $x/2$-t, tehát az

$$m^2+n^2, \qquad p^2+q^2, \qquad mp+nq$$

számoknak nem lehet közös osztója. (Ez magában foglalja azt is, hogy m, n, p, q-nak ne legyen közös osztója.)

Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. Gimn.)

[1] Az 1085. gyakorlatban, K. M. L. 35 (1967) 66. o.