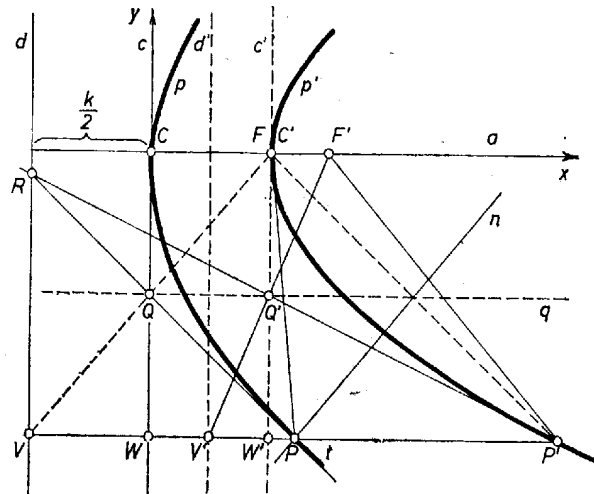


Ismeretes, hogy az F fókusz tükörözve a parabola bármely P pontjához tartozó t érintőre, P -nek a d vezéregyenesen levő V merőleges vetületét kapjuk, vagyis amely pontra a definíció szerint $PV = PF$. Eszerint a szóban forgó P' pont V -nek képe a t , n egymásra merőleges egyeneseken való, egymás utáni két tükrözés után. Azt is tudjuk, hogy két ilyen tükrözés eredménye ugyanaz, mint a tengelyek metszéspontjára – itt P -re – való tükrözés, tehát P' a VP félegyenesen van, és $VP' = 2 \cdot VP$.

Eszerint a keresett p' mértani hely az adott p parabolából áll elő, ennek a vezéregyenesére merőleges irányú $2 : 1$ arányú nyújtásával. Bebizonyítjuk, hogy p' is parabola. Evégett megadunk egy olyan F' pontot és d' egyenest, melyektől p' -nek minden pontja egyenlő távolságra van.



Ennek során felhasználjuk az ábra alakzatának alábbi két tulajdonságát. F -nek a fenti t érintőn levő Q vetülete rajta van p -nek c csúcserintőjén, így a mondott tükrözés miatt $FQ = QV$, eszerint Q rajta van az a parabolatengely és a VP egyenes közti síksáv q szimmetriatengelyén. Továbbá c és VP metszéspontját W -vel jelölve FCQ és QWP hasonló derékszögű háromszögek, ezért

$$(1) \quad FC : CQ = QW : WP = CQ : WP.$$

Mármost p -nek a tengelye egyszersmind p' -nek is szimmetriatengelye, hiszen F -et p -nek két az a -ra szimmetrikus pontjához tartozó normálisra tükrözve a tükörképek szimmetrikus helyzetűek a -ra. Ha pedig P -ként p -nek C csúcából indulunk ki, P' -ként F -et kapjuk, mert ekkor a normális azonos az a tengellyel, és F képe önmaga. Azt sejtjük tehát, hogy p' csúcса F , és így az F -en átmenő, a -ra merőleges c' egyenes p' -nek csúcserintője.

Legyen még t -nek d -vel való metszéspontja R , ekkor a megállapított nyújtásból azt is sejtjük, hogy az RP' egyenes p' -nek érintője. Ezek alapján várható, hogy F' -t és d' -t az alábbiak szerint kapjuk: messe RP' a q egyenest Q' -ben, ekkor a Q' -ben RP' -re állított merőleges a -ból F' -t, a VP' egyenesből pedig d' -nek egy V' pontját metszi ki, és így d' a V' -ből a -ra állított merőleges.

Ezt fogjuk bizonyítani. Így mindenesetre $Q'F' = Q'V'$, és így $P'F' = P'V'$, P egyenlő távolságra van F' -től és d' -től. Ezért csak azt kell belátnunk, hogy a szerkesztett F' pont és d' egyenes helyzete független P megválasztásától.

Q' rajta van c' -n, mert $q \parallel VP'$ és $VP' = 2 \cdot VP$ miatt q -nak az RVP' háromszögbe eső szakaszát az RP súlyvonal felezi, Q' -nek d -től való távolsága 2-szer akkora, mint Q -é, egyszersmind c -nek d -től való távolsága. Legyen még c' és $V'P'$ metszéspontja W' , ekkor

$$W'P' = VP' - VW' = 2 \cdot VP - 2 \cdot VW = 2(VP - VW) = 2WP,$$

ezért az $F'C'Q'$ és $Q'W'P'$ hasonló derékszögű háromszögek, valamint (1) felhasználásával

$$F'C' = Q'W' \cdot \frac{C'Q'}{W'P'} = \frac{CQ^2}{W'P'} = \frac{CQ^2}{2WP} = \frac{FC}{2} = \text{állandó}.$$

Fordítva, p' -nek minden P' pontja előáll p -nek abból a P pontjából, amelyet a P' -n átmenő, a -val párhuzamos egyenes metsz ki.

Eszerint p' valóban parabola, csúcса azonos F -fel, vezéregyenesé pedig a CF szakasz felező merőlegese (paramétere fele akkora, mint az adott parabola paramétere).

Megjegyzés. A versenyzők a $VP' = 2VP$ összefüggés megállapítása után kizárólag koordináta-geometriai úton dolgoztak.

Legyen az adott parabola egyenlete

$$(2) \quad x = \frac{y^2}{2k},$$

ennek vezéregyenese az $x = -k/2$ egyenes, így ha P koordinátái (x, y) , akkor $VP = x + k/2$, és ezért $VP' = 2VP = 2x + k$ és P' -nek x', y' koordinátái:

$$x' = VP' - \frac{k}{2} = 2x + \frac{k}{2}, \quad y' = y.$$

Innen

$$x = \frac{1}{2} \left(x' - \frac{k}{2} \right), \quad y = y',$$

és ezeket (2)-be helyettesítve P' -re a következő összefüggés áll fenn:

$$x' = \frac{y'^2}{k} + \frac{k}{2}.$$

Ez pedig parabola egyenlete, melynek tengelye az x tengely (a pozitív fele), paramétere $k' = k/2$ és csúcsa a $(k/2, 0)$ pont, ennél fogva fókusza és vezéregyenese:

$$F' \left(\frac{3k}{4}, 0 \right), \quad x = \frac{k}{4}.$$

Kemény András (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

Barra Károly (Salgótarján, Madách I. Gimn., IV. o. t.)