

I. megoldás. $m \neq 0$ miatt $v \neq 0$, és így mindig fennáll $y \neq 0$, másrészt $u \neq 0$. A kifejezések mindig értelmezve vannak, mert közös nevezőjük nem kisebb, mint v^2 , ami pedig pozitív. (1) alapján

$$(3) \quad x + 1 = \frac{2(1-u)}{(1-u)^2 + v^2},$$

ezt (2)-vel osztva

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1-u}{v} = \frac{1-u}{mu},$$

és innen mindig

$$(4) \quad u = \frac{y}{y+m(x+1)}, \quad v = \frac{my}{y+m(x+1)},$$

ugyanis a nevező nem tűnik el, mert (2) és (3) alapján

$$y+m(x+1) = \frac{2m}{(1-u)^2 + v^2} \neq 0.$$

Ezekre támaszkodva könnyen megkapjuk x , y és m kívánt alakú összefüggését. (4) alapján

$$1-u = \frac{m(x+1)}{y+m(x+1)},$$

és így (2)-nek

$$(1-u)^2 + v^2 = \frac{2v}{y}$$

átrendezett alakjából:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{m^2(x+1)^2}{[y+m(x+1)]^2} + \frac{m^2y^2}{[y+m(x+1)]^2} &= \frac{2m}{y+m(x+1)}, \\ (x+1)^2 + y^2 &= \frac{2}{m}[y+m(x+1)], \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{m}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Ez kör egyenlete, melynek K középpontja és r sugara:

$$K\left(0, \frac{1}{m}\right), \quad r = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

Kizártuk azonban az $y = 0$ értéket, amelyhez (5) alapján $x = \pm 1$ tartozik, ennél fogva a kérdéses vonal a mondott kör, az x tengelyen levő $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ metszéspontok kihagyásával (a körnek az x tengely fölötti és alatti íve).

Megjegyzések. 1. Megkaphatjuk (5)-öt a következő megfontolással is. A kérdéses vonal minden pontjához tartozik az u , v paramétereknek legalább egy, az előírások szerinti értékpárja, ill. a $v = mu$ összefüggésnek és m állandó voltának figyelembevételével legalább egy u érték. Erre a pont mindkét koordinátája alapján $2 - 2$ érték jön szóba, mert (1)-ből és (2)-ből u szerinti rendezéssel (ami a föltevések szerint ekvivalens átalakítás):

$$(6) \quad (1+m^2)(x+1)u^2 - 2xu + (x-1) = 0,$$

$$(7) \quad (1+m^2)yu^2 - 2(m+y)u + y = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy (6)-nak és (7)-nek van közös gyöke.

Várható, hogy ilyen esetben a két egyenlet együtthatói között összefüggés áll fenn, hiszen tetszés szerinti együtthatók esetén két másodfokú egyenlet $2 - 2$ gyöke között nem várhatók egyenlők. Ezt az összefüggést keressük meg az,

$$a_1z^2 + b_1z + c_1 = 0,$$

$$a_2z^2 + b_2z + c_2 = 0$$

egyenlet-pár esetére, majd alkalmazzuk feladatunkra. Legyen közös gyökük z_1 , ekkor fennáll

$$(8) \quad a_1z_1^2 + b_1z_1 + c_1 = 0,$$

$$(9) \quad a_2z_1^2 + b_2z_1 + c_2 = 0.$$

Először z_1^2 , majd z_1 kiküszöbölésével (azaz (8)-at $-a_2$ -vel, (9)-et a_1 -gyel, majd b_2 -vel, ill. $-b_1$ -gyel szorozva és összeadva)

$$\begin{aligned}(a_1 b_2 - a_2 b_1) z_1 + (a_1 c_2 - a_2 c_1) &= 0, \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) z_1^2 + (c_1 b_2 - c_2 b_1) &= 0.\end{aligned}$$

Mármost az elsőből

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 z_1^2 = (a_2 c_1 - a_1 c_2)^2,$$

a másodikat $a_1 b_2 - a_2 b_1$ -gyel szorozva és a kapott összefüggést felhasználva:

$$(10) \quad (a_2 c_1 - a_1 c_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 b_2 - c_2 b_1) = 0.$$

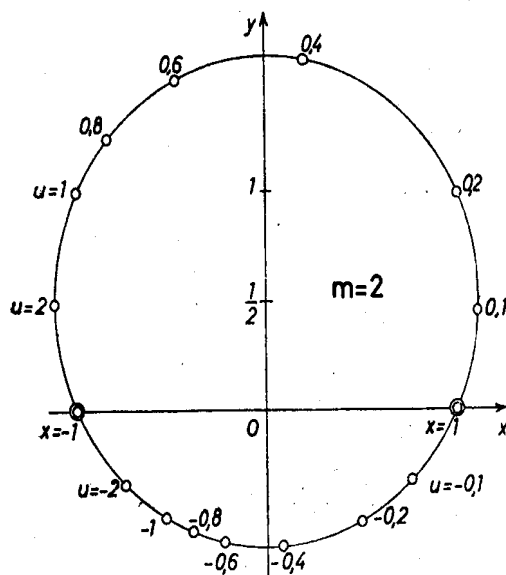
Ez a keresett összefüggés, közös gyökkel bíró két másodfokú egyenlet együtthatói között.

Esetünkben (6) és (7) együtthatóival (10) alapján:

$$4(1 + m^2)^2 y^2 + 4(1 + m^2)[y + m(x + 1)][m(x - 1) - y] = 0,$$

ami ismét (5)-re vezet.

2. Sejtést kaphatunk a kérdéses vonalra vonatkozóan néhány pontjának ábrázolásával is. Az 1. ábrán $m = 2$ esetére az $u = \pm 0,1, \pm 0,2, \pm 0,4, \pm 0,6, \pm 0,8, \pm 1, \pm 2$ értékekkel kapott pontok kört rajzolnak ki.



1. ábra

II. megoldás. Az előző megoldás (3) és (2) formulájában a jobb oldalak számlálói a nevezőkben szereplő négyzetek alapjai. Így a két kifejezés négyzetét összeadva egyszerűsíteni lehet:

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + y^2 &= \frac{4}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad \text{vagy} \\ [(x + 1)^2 + y^2][(1 - u)^2 + v^2] &= 4.\end{aligned}$$

Ennek geometriai értelmet adhatunk, ha u -t, v -t is koordinátáknak fogjuk fel. A két tényező még szimmetrikusabbá válik, ha a $\xi = -u$, $\eta = v$ koordinátákkal meghatározott R pontot tekintjük. Ehhez az

$$(1^*) \quad x = \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{(\xi + 1)^2 + \eta^2},$$

$$(2^*) \quad y = \frac{2\eta}{(\xi + 1)^2 + \eta^2}$$

összefüggés egy $P(x, y)$ pontot rendel, az $R_0(-1, 0)$ pont kivételével, amire az (1^*) , (2^*) formuláknak nincs értelme. Főnt nyert összefüggésünk pedig az

$$[(x + 1)^2 + y^2][(\xi + 1)^2 + \eta^2] = 4$$

alakot nyeri, amiből pontjaink távolságára az

$$(11) \quad R_0 P \cdot R_0 R = 2$$

összefüggés következik. A (3) és (2*) összefüggéseket

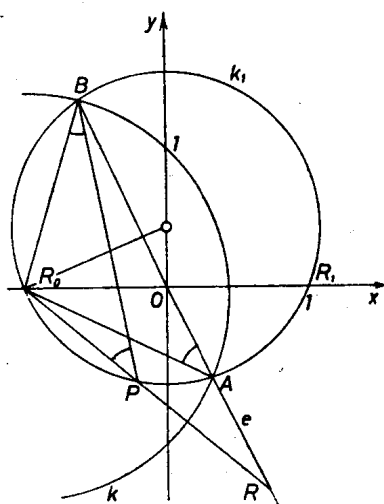
$$(3^*) \quad x + 1 = \frac{2}{R_0 R^2} (\xi + 1),$$

$$(2^*) \quad y = \frac{2}{R_0 R^2} \eta$$

alakban írhatjuk, vagyis $x + 1$, y , a $\xi + 1$ -ből, ill. η -ből ugyanazzal a pozitív tényezővel való szorzás útján keletkezik, tehát P és R egy az R_0 -ból induló félegyenesen van. Ezzel leírtuk geometriailag azt a transzformációt, amely az (1*), (2*) képleteknek megfelelően rendeli minden az R_0 -tól különböző $R(\xi, \eta)$ ponthoz a $P(x, y)$ pontot. Ennél a transzformációnál speciálisan azok az R pontok önmaguknak felelnek meg, amelyekre $R_0 R = \sqrt{2}$, vagyis az R_0 középpontú, $r = \sqrt{2}$ sugarú k kör pontjai és más pont nem.

Ha a feladat feltételei teljesülnek, és $u \neq 0$, akkor $\eta/\xi = -v/u = -m \neq 0$ is állandó, tehát az ilyen pontok egy-egy, az origón átmenő és az x , y tengelyektől különböző egyenesen vannak. Így a feladatot geometriailag a következővé alakítottuk át: A leírt transzformáció mibe visz át egy a k kört két pontban metsző, annak R_0 középpontján nem átmenő, tetszőleges e egyenest?

Legyenek e és k metszéspontjai A és B , R legyen az e tetszőleges, az A , B pontoktól különböző pontja, és P az $R_0 R$ félegyenes azon pontja, amelyre (11) teljesül (2. ábra).



2. ábra

Feltehetjük, hogy R a BA félegyenesen van. Az $R_0 B R$ és $R_0 P B$ háromszögek R_0 -nál levő szöge közös és e szög szárain levő oldalakra (11) alapján

$$R_0 B : R_0 R = R_0 P : R_0 B,$$

e két háromszög tehát hasonló, így

$$R_0 B R \sim R_0 P B.$$

Az ABR_0 háromszög egyenlő szárú, tehát $R_0 B R \sim R_0 A B$, így az $R_0 B$ szakasz az A és P pontokból egyenlő szög alatt látszik, P tehát rajta van az ABR_0 háromszög köré írható k_1 körön. Megfordítva: a k_1 kör tetszőleges, R_0 -tól különböző P pontjához van olyan R pontja e -nek, melyet transzformációnk éppen P -be visz. Valóban, melle az $R_0 P$ egyenes e -t R -ben. R -hez az előbbieket szerint a transzformáció a k_1 kör és az $R_0 R$ egyenes R_0 -tól különböző metszéspontját, vagyis P -t rendeli hozzá.

Visszatérve a koordináta-rendszerbe, az origón átmenő, $-m$ meredekségű egyenesek képe a fentiek alapján egy k_1 kör lesz, mely átmegy az R_0 ponton és az origó képén, az $R_1(+1, 0)$ ponton. Mivel az $R_0 R_1$ szakasz felező merőlegese, az y tengely, k_1 -nek átmérője, azért k_1 középpontja is az y tengelyen van. Mint láttuk, k_1 -nek az eredeti e egyenesre merőleges, R_0 -on átmenő egyenes is átmérője, a középpont tehát az R_0 -on átmenő, $\left(+\frac{1}{m}\right)$ meredekségű egyenesnek

az y tengellyel alkotott metszéspontja, azaz a $\left(0, \frac{1}{m}\right)$ koordinátájú pont; így k_1 sugara

$$r = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}},$$

és egyenlete:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{m}\right)^2 = 1 + \frac{1}{m^2}.$$

Eleve nem tartozik k -hoz a kivételes R_0 pont, és mivel a $v/u = m \neq 0$ feltétellel az origót is kizártuk, ennek képe, az R_1 pont sem tartozik az (1), (2) egyenletekkel leírt görbéhez. A fentiekből viszont következik, hogy k_1 minden más pontja az (1)–(2) görbéhez tartozik.

(Tusnádý Gábor)