

I. megoldás. Legyen az egyik gyökpár α és $-\alpha$, a másik β és $-\beta$ (föltehetjük, hogy $\alpha, \beta > 0$, hiszen $x = 0$ nem elégíti ki (1)-et), és a hátra levő két gyök γ, δ . Ekkor (1) bal oldala mint gyöktényezők szorzata:

$$(2) \quad \begin{aligned} & (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x - \gamma)(x - \delta) = \\ & = [x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2\beta^2][x^2 - (\gamma + \delta)x + \gamma\delta], \end{aligned}$$

és a két kifejezés azonos volta alapján

$$\begin{aligned} (3) \quad & x^5 \text{ együtthatójából} & -(\gamma + \delta) &= -2, \\ (4) \quad & x^4 \text{ együtthatójából} & \gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) &= -9, \\ (5) \quad & x^3 \text{ együtthatójából} & (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma + \delta) &= 14, \\ (6) \quad & x^2 \text{ együtthatójából} & -\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 &= 24, \\ (7) \quad & x \text{ együtthatójából} & -\alpha^2\beta^2(\gamma + \delta) &= -20, \\ (8) \quad & x^0 \text{ együtthatójából} & \alpha^2\beta^2\gamma\delta &= -20. \end{aligned}$$

Óvatosságra int, hogy a (2)-ben szereplő 4 együtthatóra 6 egyenletet kaptunk.

(5)-öt és (7)-et (3)-mal osztva $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ és $\alpha^2\beta^2 = 10$, az utóbbival (8)-at osztva $\gamma\delta = -2$. Ezekkel a föl nem használt (4) és (6) teljesülnek. Továbbmenve

$$\alpha^2, \beta^2 \text{ értéke 2 és 5, } \gamma \text{ és } \delta \text{ értéke } 1 + \sqrt{3} \text{ és } 1 - \sqrt{3},$$

és így az egyenlet gyökei:

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3},$$

Csetényi Artur (Kiskunhalas, Szűcs J. Ált. Isk., 8. o. t.)

II. megoldás. A fenti jelöléseket tovább használjuk. α és $-\alpha$ kielégíti (1)-et, tehát

$$\begin{aligned} \alpha^6 - 2\alpha^5 - 9\alpha^4 + 14\alpha^3 + 24\alpha^2 - 20\alpha - 20 &= 0, \\ \alpha^6 + 2\alpha^5 - 9\alpha^4 - 14\alpha^3 + 24\alpha^2 + 20\alpha - 20 &= 0, \end{aligned}$$

eszerint α csak olyan szám lehet, amely e két egyenlőség különbségét is kielégíti:

$$4\alpha(\alpha^4 - 7\alpha^2 + 10) = 0.$$

Nem lehet azonban $\alpha = 0$, mert ez nem gyöke (1)-nek. A leválasztással adódó

$$\alpha^4 - 7\alpha^2 + 10 = 0$$

egyenletből valamilyen sorrendben α^2, β^2 értéke 2 és 5, de sorrendjük lényegtelen.

A megtalált gyökökhöz tartozó gyöktényezők $(x^2 - 2)(x^2 - 5) = x^4 - 7x^2 + 10$ szorzatával (1) bal oldala (maradék nélkül) osztható és a hányados $x^2 - 2x - 2$. Ez azt jelenti, hogy $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ és $x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$, valóban gyöke (1)-nek, a további gyökök pedig az

$$(9) \quad x^2 - 2x - 2 = 0$$

egyenletből $x_{5,6} = 1 \pm \sqrt{3}$.

Kóczy László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás Legyen továbbra is az egyik gyök pár α és $-\alpha$, és mint láttuk, $a \neq 0$, így (1) bal oldala osztható a megfelelő gyöktényezők

$$(x - \alpha)(x + \alpha) = x^2 - \alpha^2 = x^2 - a$$

szorzatával, ahol $a = \alpha^2$. Ezt fogjuk meghatározni. Az osztást végrehajtva a $h(x)$ hányados- és az $m(x)$ maradékpolinom:

$$(10) \quad \begin{aligned} h(x) &= x^4 - 2x^3 + (a - 9)x^2 + (14 - 2a)x + (24 - 9a + a^2), \\ m(x) &= (-20 + 14a - 2a^2)x + (-20 + 24a - 9a^2 + a^3). \end{aligned}$$

Az utóbbinak azonosan 0-nak kell lennie, tehát a olyan szám, amelyre egyidejűleg teljesül:

$$\begin{aligned} (11) \quad & -20 + 14a - 2a^2 = 0, \\ (12) \quad & 20 + 24a - 9a^2 + a^3 = 0. \end{aligned}$$

(11) gyökei $a_1 = 2$ és $a_2 = 5$, és mindkettő a (12)-nek is gyöke. Ezzel ismét meg kaptuk (1)-nek $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$ gyökei és a II. megoldás befejezése szerint haladunk tovább.

Megjegyzések. 1. Ha (1)-ből a gyök-párokat egyenként választjuk le, az első osztás hányadosát (10)-ből kapjuk $a = 2$ (vagy $a = 5$) helyettesítéssel.

2. Magyarázza meg az olvasó a (11) bal oldala és a (9)-hez vezető osztó közti kapcsolatot.