Különböző törzsszámok hatványainak szorzatára felbontva $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, eszerint a keresett számoknak oszthatóknak kell lenniük $3^2 = 9$-cel, 7-tel és 11-gyel, és ezek teljesülése esetén szorzatukkal is oszthatók a számok.

A 9-cel való oszthatóságot a számjegyek előírása biztosítja, mert a tízféle számjegy összege, mindegyiket egyszer véve, $45 = 9 \cdot 5$.

11-gyel azok és csak azok az egész számok oszthatók, amelyeknél a végétől számított páratlan sorszámú helyeken álló számjegyek összegéből a páros sorszámú helyeken álló számjegyek összegét kivonva, 11-gyel osztható számot kapunk. Ugyanis a k-adik jegy helyi értéke 10^{k-1}, és páratlan k esetén az ennél 1-gyel kisebb szám osztható 11-gyel, mert így $k-1$ páros, és ezért $10^{k-1}-1$ osztható $10^2-1 = 99$-cel, ami $11 \cdot 9$ ($k = 1$ esetén is teljesül), páros k esetén pedig $k-1$ páratlan és $10^{k-1}+1$ osztható $10+1$-gyel. Ezek alapján – a legföljebb négyjegyű számokra szorítkozva – így adódik az állítás: az A, B, C, D jegyekkel írt szám így alakítható:

$$A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D =$$
$$= A(11M_1 - 1) + B(11M_2 + 1) + C(11M_3 - 1) + D = 11M_4 + (D+B) - (C+A),$$

és az utolsó alak igazolja állításunkat (M_i egész szám).

Eszerint esetünkben – a mondott két 5–5 tagú jegyösszeget S_1-gyel, ill. S_2-vel jelölve $S_1 - S_2 = 11N$. Itt N páratlan, mert $S_1 + S_2 = 45$, páratlan, és két egész szám összege és különbsége megegyező párosságú. Továbbá csak $N = \pm 1$ jöhet szóba, ezért egyikük 28, másikuk 17, mert $N = \pm 3$ esetén a kisebbik összeg 6 lenne, ami nem lehet 5 különböző számjegy összege.

A 7-tel való oszthatóságot közvetlen kipróbálással fogjuk biztosítani.

693 legkisebb megfelelő többszörösét keresve, ez nem kezdődhet a szóba jövő legkisebb 1023 számjegy négyessel, mert ez S_1-be $3+0$-t, S_2-be $2+1$-et ad, és a mondott 28-as összeg hátra levő része, 25 már nem érhető el a legnagyobb három jeggyel sem: $9+8+7 = 24$. Abból, hogy itt a hiány 1, adódik, hogy az első négy jeggyel írt számot 1024-re növelve, a páratlan sorszámú helyeken – éppen a hátrább álló helyeken – egyértelműen elérhető a nagy jegyeket igénylő $S_1 = 28$, és ezzel S_2 hátra levő jegyei is kiadódnak. Így a szóba jövő számok közül a $9 \cdot 11 = 99$-cel oszthatók legkisebbike – a páratlan sorszámú helyeken a 7, 8, 9 jegyeket, a párosakon a 3, 5, 6-ot növekvő rendben felírva – 1 024 375 869.

Ez nem osztható 7-tel, maradéka 6, de a 11-gyel való oszthatóságot megőrző legkisebb növeléssel, 9 és 8 cseréjével elérhető a 7-tel való oszthatóság, mert így a növelés $(9-8)(100-1) = 99 = 7 \cdot 14 + 1$. A keresett többszörösök legkisebbike:

$$1\ 024\ 375\ 968 = 693 \cdot 1\ 478\ 176.$$

A legnagyobb többszöröst keresve, ennek elején először 9876-tal próbálkozunk. Ez S_1-be $8+6 = 14$-et ad, amiből még elérhető az összeg értékek kisebbike: $8+6+2+1+0 = 17$, és így $9 \cdot 11$-nek legnagyobb, szóba jövő többszöröse a fentiekhez hasonlóan 9 876 524 130.

Ennek 7-tel való osztási maradéka 4. A fentihez hasonlóan a legkisebb csökkenést okozó 1, 0 csere a számot 99-cel csökkentené, a maradékot pedig 1-gyel, 3-ra, ez nem felel meg. A tízes és ezres helyi értékű 4 és 3 cseréje viszont a számot $(4-3)(1000-10) = 990$-nel csökkenti, ami $7 \cdot 141 + 3$. Eszerint mindkét cserét végrehajtva a maradék 0-ra csökken, és a kívánt többszörösök legnagyobbika:

$$9\ 876\ 523\ 041 = 693 \cdot 14\ 251\ 837.$$

Csetényi Artúr (Kiskunhalas, Szűts J. Ált. Isk., 8. o. t.)
Prőhle Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. G., II. o. t.)