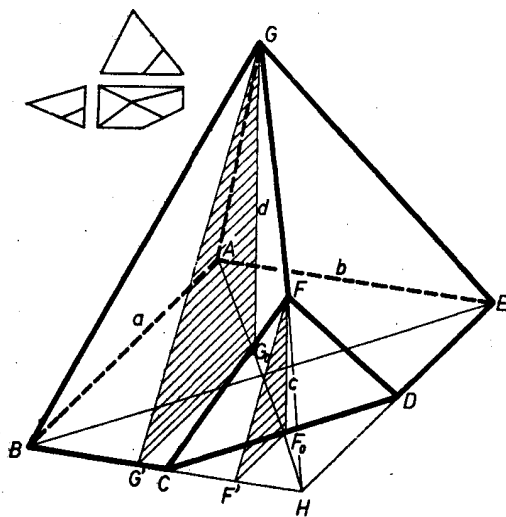


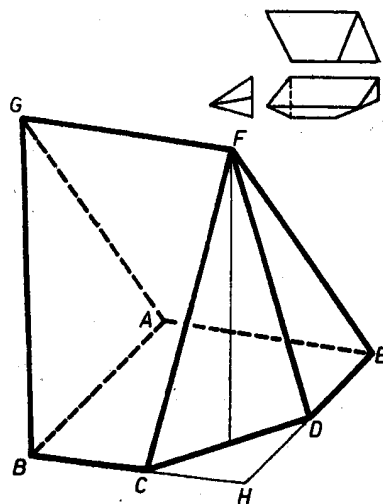
I. Tekintsük az említett $ABCDE$ ötszöglapot a P poliéder alaplapjának úgy, hogy $AB = a$, $AE = b$, $DE = a/2$, ekkor $BC = b/2$. A további lapok száma 5, így mindegyiküknek van éle az alapon, és az alapsíkra merőleges lap a CD élhez kapcsolódik; legyen ennek harmadik csúcsa F , a hátra levő 7. csúcs pedig G .

A CB és DE alapélre támaszkodó oldallapoknak a konvexitás miatt át kell menniük F -en. P további vizsgálata aszerint alakul, hogy F -ben csak a mondott 3 lap metszi egymást, vagy még további lap is.

Ha F 3-lapú csúcs – azaz egyszersmind 3-élű is –, akkor P -nek F -ből kiinduló harmadik élét az FCB , FDE oldallapsíkok metszésvonala tartalmazza (1. ábra). A metszésvonal az alaplap síkját a BC , ED egyenesek metszéspontjában, a téglalap lemetezett H csúcsában dőli át, másrészt átmegy G -n, hiszen az 5 alapcsúcs egyikén sem mehet át. E metszésvonalnak egyetlen pontja van az alap fölött d magasságban, eszerint G egyértelműen meg van határozva, hacsak $d > c$, hiszen a konvexitás miatt G -nek a CDF sík A -t tartalmazó oldalán kell lennie, vagyis a HF szakasz F -en túli meghosszabbításán. – Ezek szerint az F -ben összefutó lapok a $BCFG$, $EDFG$ négyszögek, a hátra levő 2 lap pedig a konvexitás alapján az ABG és AEF háromszög. Ebben az esetben P -t az $ABHEG$ gúlából is származtathatjuk a $HCDF$ gúla lemetzése útján.



1. ábra



2. ábra

Amennyiben F a poliéder további oldallapjának is csúcsa – ti. az alaphoz a BC , CD , DE élen kapcsolódó lapokon túl –, ez csak az egyik lehet az alaphoz a hátra levő EA és AB élen kapcsolódó lapok közül, különben ugyanis a keletkező konvex poliéder ötoldalú gúla lenne, és nem lehetne 7. csúcsa. Elég azt az esetet tekintenünk, ha az F -en átmenő negyedik oldallapsík az EA élen kapcsolódik, hiszen a másik lehetőség ebbe megy át a B , E és C , D betű-párok egyidejű fölcserélésével, és ez a fölcserélés az alapidom tulajdonságait változtatlanul hagyja (2. ábra).

Ekkor az F -ben összefutó 4 lapsík egymásutánja (3–3 ponttal meghatározva) FBC , FCD , FDE , FEA , és így az utolsó lap az első laphoz élből csatlakozik. S mivel e két sík tartalmazza a téglalap szemben fekvő, tehát párhuzamos BH , AE oldalegyenesét, azért az F -en áthaladó metszésvonaluk is párhuzamos ezekkel, és így az alap síkjával is. Ezen kell lennie G -nek, ilyen megoldás tehát csak $d = c$ esetén lehetséges, és megfordítva: e feltétel mellett nincs is más megoldás.

Így azonban G -ként szerepelhet az F -ből kiinduló és EA -val egyirányú félegyenes bármely pontja, tehát P nincs egyértelműen meghatározva.

II. P felszínének és térfogatának kérdését csak az előbbi (azaz $d > c$ feltételű) esetben vizsgálhatjuk (1. ábra).

P térfogata, mint az $ABHEG$ és $CHDF$ gúla térfogatának különbsége

$$V = \frac{abd}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{ab}{24} (8d - c).$$

a numerikus adatokkal 4625 térfogategység.

III. A $GFCB$, $GFDE$ lapok területét szintén a lemetzésre támaszkodva számítjuk. Legyen G és F vetülete a BC egyenesen G' , F' , az alaplap síkján G_0 , F_0 , a legutóbbi felezi a CD alapélt, ennél fogva negyedeli a téglalap HA átlóját, így pedig a fentiek szerint G_0 is rajta van az átlón. Ezért $GG'G_0$ és $FF'F_0$, valamint $HG'G_0$ és $HF'F_0$ hasonló háromszögek, így G_0 -nak a BC , ED egyenestől való távolsága

$$G_0G' = \frac{d}{c} \cdot F_0F' = \frac{ad}{4c}, \quad G'H = \frac{d}{c} \cdot F'H = \frac{bd}{4c},$$

ennél fogva az AE , AB egyenestől való távolsága

$$\left| \frac{ad}{4c} - a \right| = \frac{a}{4c} \cdot |d - 4c|,$$

$$\left| \frac{bd}{4c} - b \right| = \frac{b}{4c} \cdot |d - 4c|.$$

Így a GBH , GHE , GEA , GAB oldalháromszög magassága:

$$(GG' =) \frac{d}{4c} \cdot \sqrt{a^2 + 16c^2}, \quad \frac{d}{4c} \cdot \sqrt{b^2 + 16c^2},$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{16c^2} (d - 4c)^2 + d^2}, \quad \sqrt{\frac{b^2}{16c^2} (d - 4c)^2 + d^2},$$

és hasonlóan az FCH , FHD háromszög F -ből induló magassága

$$\frac{1}{4} \sqrt{a^2 + 16c^2}, \quad \frac{1}{4} \sqrt{b^2 + 16c^2}.$$

P felszínét most már úgy kapjuk, hogy e 6 magasságot rendre megszorozzuk a megfelelő alap felével: $b/2$ -vel, $a/2$ -vel, $b/2$ -vel, $a/2$ -vel, $(-b/4)$ -gyel, $(-a/4)$ -gyel, és e szorzatok összegéhez hozzáadjuk a CDF háromszög és az alaplap területének összegét. Alkalmas összevonásokkal:

$$F_P = \frac{b}{16c} (2d - c) \sqrt{a^2 + 16c^2} + \frac{a}{16c} (2d - c) \sqrt{b^2 + 16c^2} +$$

$$+ \frac{b}{8c} \sqrt{a^2 (d - 4c)^2 + 16c^2 d^2} + \frac{a}{8c} \sqrt{b^2 (d - 4c)^2 + 16c^2 d^2} + \frac{c}{4} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{7}{8} ab.$$

A számadatokkal $F_P = 1851,6$ területegység.

Nagy András (Budapest, Toldy F. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján.

Megjegyzés. $d = 4c$ esetén G_0 az A csúcsba esik, és F_P képlete némileg egyszerűbbé válik.