

n -nek legkisebb, szóba jövő értéke, $n = 2$ -re K értéke $(33 - 9)/(33 - 27) = 4$, így azt kell bizonyítanunk, hogy minden pozitív egész $n(> 1)$ esetén $4 - K$, azaz

$$\frac{3(1^5 + 2^5 + \dots + n^5) + (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 4(1 + 2 + \dots + n)^3}{(1^5 + 2^5 + \dots + n^5) - (1 + 2 + \dots + n)^3}$$

értéke 0, és természetesen hogy a nevező 0-tól különböző ($n = 1$ esetén a nevező 0, K nincs értelmezve). Minden $n > 0$ esetén, mint ismeretes¹

$$(1) \quad \begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{és} \\ 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \end{aligned}$$

így az állítás egyenértékű azzal, hogy $n > 1$ -re

$$(2) \quad \begin{aligned} 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 &= \frac{1}{3} \left[-(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 4(1 + 2 + \dots + n)^3 \right] = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{12} [2n(n+1) - 1]. \end{aligned}$$

Ezt fogjuk bizonyítani a teljes indukció módszerével.

$n = 2$ -re (2) helyességét már láttuk. (Egyébként (2) az $n = 1$ esetre is helyes.) Feltesszük; hogy (2) helyes valamely k természetes szám esetében:

$$(2') \quad 1^5 + 2^5 + \dots + k^5 = \frac{k^2(k+1)^2}{12} [2k(k+1) - 1],$$

és bebizonyítjuk, hogy helyes az 1-gyel nagyobb számra is:

$$(2'') \quad 1^5 + 2^5 + \dots + k^5 + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{12} [2(k+1)(k+2) - 1].$$

Valóban, (2'') és (2') jobb oldalának különbsége

$$\frac{(k+1)^2}{12} \left[2(k+1)(k+2)^3 - (k+2)^2 - 2k^3(k+1) + k^2 \right],$$

itt a szögletes zárójelbeli kifejezés egyszerű alakítással

$$\begin{aligned} 2(k+1) \left[(k+2)^3 - k^3 \right] - \left[(k+2)^2 - k^2 \right] &= \\ 4(k+1) [3k^2 + 6k + 4 - 1] &= 12(k+1)^3, \end{aligned}$$

így a jobb oldalak különbsége $(k+1)^5$, egyenlő a bal oldalak különbségével. Eszerint (2') érvényessége öröklődik (2'')-re, tehát (2) helyes.

Most már K nevezője (2) és (1) alapján

$$\begin{aligned} (1^5 + 2^5 + \dots + n^5) - (1 + 2 + \dots + n)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{24} [4n^2 + 4n - 2 - 3n(n+1)] = \\ &= \frac{(n-1) \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)}{24}, \end{aligned}$$

és ez $n > 1$ esetén sohasem 0. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Várható volt, hogy K nevezőjének első tagja is n -nek polinomja – amint ezt a második tagról tudjuk –, így a nevező is az, ennél fogva legfőljebb annyi n értékre veszi fel a 0 értéket, amennyi a fokszáma. Erre támaszkodva végeztük előbb (2) bizonyítását, és csak ez után azt, mely n értékek esetén válik 0-vá a nevező.

¹ A köbök összegének zárt alakját lásd pl.: *Gallai Tibor-Hódi Endre-Péter Rózsa-Szabó Pirokska-Tolnai Jenő: Matematika az ált. gimn. III. o. számára*, 9. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1959, 128. o.