

a) Az adott kifejezés így alakítható:

$$(1) \quad K = \frac{(n^3 + 10n^2) - (120n^2 + 1200n) + (999n + 9990) - 12\,600}{-(n + 10)} =$$

$$= -n^2 + 120n - 999 + \frac{12\,600}{n + 10}.$$

n helyére egész számot helyettesítve a jobb oldal első három tagja egész. Ezért K akkor és csak akkor egész, ha a tört kifejezés egész számot ad, vagyis ha $n+10$ egyenlő 12 600 valamelyik osztójával. Itt természetesen az abszolút értékben egyenlő pozitív és negatív osztókat külön-külön tekintjük.

$12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, az 1106. gyakorlatban¹ látottak szerint pozitív osztóinak száma az 1-gyel -1 -gyel növelt kitevők szorzata: $(3+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 72$, ugyanennyi a negatív osztók száma, tehát 144 olyan n egész szám van, amely mellett K egész. Éspedig az

$$n + 10 = -12\,600, -6\,300, \dots, 8, 9, 10, 12, \dots, 12\,600$$

egyenletből

$$n = -12\,610, -6\,310, \dots, -2, -1, 0, 2, \dots, 12\,590.$$

b) Az $n > 0$, $K > 0$ egész értékpárok meghatározása céljára kizárjuk azokat a pozitív egész n -eket, amelyekre $K \leq 0$. Alakítsuk (1)-et így: $K = K_1 + K_2$, ahol

$$K_1 = \frac{12\,600}{n + 10}, \quad K_2 = (111 - n)(n - 9) = -(n - 60)^2 + 2\,601.$$

K_1 minden $n > 0$ esetén pozitív és monoton csökken, ha n növekszik. Ha $9 \leq n \leq 111$, akkor $K_2 \geq 0$, itt tehát $K > 0$. Az $n > 111$ és $0 < n < 9$ értékekre $K_2 < 0$, az utóbbiakra azonban

$$|K_2| \leq 110(9 - n) < K_1, \quad \text{mert}$$

$$\frac{12\,600}{n + 10} - 110(9 - n) = \frac{110n^2 + 110n + 2\,700}{n + 10} > 0,$$

tehát itt is $K > 0$.

A második alak, szerint $n > 60$ esetén K_2 is monoton csökkenő, tehát ez áll K -ra is. Mármost $n = 113$ esetén $K < 0$, de $n = 112$ esetén még $K > 0$. Mindezek szerint $K > 0$ a $0 < n < 113$ egész értékekre teljesül.

Ezekre az n -ekre $10 < n + 10 < 123$, azt keressük tehát, hány osztója van 12 600-nak 10 és 123 között, a határokat nem véve tekintetbe. A választ két észrevétel könnyíti. A $12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ felbontás mutatja, hogy az $1, 2, \dots, 10$ egész számok mindegyike osztó, tehát az alsó korlát miatt elhagyandó pozitív osztók száma 10. Másrészt 12 600 négyzetgyöke, 112,2 közel esik a 123-as korláthoz, a nála kisebb és nagyobb osztók száma egyenlő, hiszen a négyzetgyöknél kisebb számmal osztva a hányados nagyobb a gyöknél és megfordítva. Pl. $12\,600/105 = 120$, ezek ún. kapcsolt osztók 12 600-ra nézve. Így a 112,2-ig megtartandó osztók száma $72/2 - 10 = 26$, és csak a 112,2 és 123 közti osztóit kell megkeresnünk 12 600-nak. Már láttuk, hogy 120 megfelelő osztó, több pedig nincs, mert 113 prím, a továbbiak pedig rendre a 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 törzsszám többszöröse, amik nincsenek meg 12 600 felbontásában.

Mindezek szerint 27 olyan n természetes szám van, amely mellett K pozitív egész szám.

Hárs László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel

¹K. M. L. 35 (1967) 151. o.