

I. A (3) kifejezés mindkét oldalának minden egyes tagja (1) szerint 4 tagú kifejezés. (1)-nek mindegyik tagjában csak egyféle koordináta lép fel, csak x , vagy csak y , vagy csak z , vagy csak u , és pedig 2., 3., 4. tagja úgy áll elő az előtte állóból, hogy abban a szóban forgó pontok 1., 2., ill. 3. koordinátáját rendre az illető pont 2., 3., 4. koordinátájával helyettesítjük. Mivel még S bármelyik koordinátájának képezésében is csak az ugyanannyiadik koordinátáit használjuk fel P_1, P_2, P_3, P_4 -nek, és pedig (2) alapján, az előbb leírt helyettesítésekkel, azért (3) két oldala olyan 4–4 kifejezés összegére bontható, hogy az elsőben csak x betűk lépnek fel, és a 2., 3., 4. kifejezések úgy állnak elő az 1-gyel kisebb sorszámúakból, hogy bennük (az indexek megtartásával) minden egyes x, y, z betű helyére y -t, z -t, végül u -t írunk.

Ezek alapján (3) bizonyítása végett elég megmutatni, hogy a jobb és bal oldal x -es tagjaiból alakuló két kifejezés azonos, ebből már következik a két oldali y -os, z -s, ill. u -s kifejezések azonossága is, tehát (3) helyes volta. Tovább (3)-nak csak az x -es tagjait tekintjük.

Az azonosítást könnyen áttekinthetővé tehetjük x_5 szerinti rendezéssel, hiszen így a két kifejezés, a koordináta-különbségek négyzetének kifejtése után, x_5 -nek másodfokú polinomja.

x_5^2 együtthatója a bal oldali $(x_5 - x_S)^2$ -ben 1, jobbról pedig $1/4 \cdot 4 = 1$, hiszen 5-ös index csak az $1/4$ együtthatójú zárójelben lép fel, és azon belül mind a négy $(x_5 - x_i)^2$ kifejezésből – ahol $i = 1, 2, 3, 4$ – az első tag x_5^2 együtthatója 1, összegük 4.

Ugyanígy látjuk, hogy x_5 első hatványának együtthatója a bal oldalon $-2x_S$, a jobb oldalon

$$\frac{1}{4}(-2)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

ezek pedig (2) szerint azonosak.

Az x_5 -öt nem tartalmazó tag (3) bal oldalán, (2) felhasználásával,

$$(4) \quad \begin{aligned} x_S^2 &= \frac{1}{16}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = \\ &= \frac{1}{16}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \frac{2}{16}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4). \end{aligned}$$

A jobb oldalon, az $1/4$ együtthatójú zárójelben az x_5 -öt nem tartalmazó tagok mind négyzetek: x_i^2 , ahol $i = 1, 2, 3, 4$. Az ilyen tagok száma a $-1/16$ együtthatójú zárójelben $6 \cdot 2 = 12$, és pedig mindegyik index 3-szor lép fel, a többi 3 indexszel párosítva, így x_i^2 együtthatója a jobb oldalon

$$\frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{1}{16},$$

egyenlő a (4) jobb oldalán álló első együtthatóval.

Végül a $-1/16$ együtthatójú zárójel 6 vegyes indexű, kéttényezős $-2x_i x_j$ alakú szorzatot tartalmaz az 1, 2, 3, 4 indexek minden párosításával, és ezek összege azonos (4) jobb oldalának második tagjával.

Ezzel a (3) két oldalán álló, csak x -eket tartalmazó kifejezések minden tagját figyelembe vettük, az azonosság fennáll, így a fentiek szerint a bizonyítást befejeztük.

II. Az 1121. gyakorlatban¹ feladatunk állításának a 3-dimenziós (vagyis a megszokott térbeli) megfelelőjét bizonyítottuk, és ehhez a II. megoldásban felhasználtuk az a, b, c oldalakkal bíró ABC háromszög C csúcsából kiinduló $s_c = CF$ súlyvonalára vonatkozó

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \quad \text{azaz} \quad CF^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2) - \frac{1}{4}AB^2$$

összefüggést, ami pedig feladatunk állításának a 2-dimenziós térbeli, vagyis a megszokott síkbeli megfelelője. Valóban, a síkon, a 2-dimenziós térben egy pont meghatározására 2 koordináta elegendő, és a $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontok távolságára

$$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

felezőpontjuk – a két pontból álló pontrendszer súlypontja – koordinátái pedig

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_S = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ugyanezek a 3 koordinátával leírt (3-dimenziós) térben

$$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

¹Az $ABCD$ háromoldalú gúla (tetraéder) ABC lapjának súlypontja S . Bizonyítsuk be, hogy a gúla D -ből kiinduló DS súlyvonala az élek felhasználásával az alábbi képlettel fejezhető ki:

$$DS^2 = \frac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

ami egy alkalmas téglatest testátlója hosszaként könnyen belátható, a $P_1P_2P_3$ háromszög S súlypontjára pedig

$$x_S = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_S = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Itt az első kettőt ismerjük a síkbeli koordináta-geometriából, érvényességük belátható abból, hogy egy háromszög súlypontjának vetülete azonos vetületének súlypontjával, hiszen szakasz felezőpontjának (súlypontjának) vetülete felezi a szakasz vetületét, és ugyanez áll a szakasz bármilyen $m : n$ arányú osztópontjára, esetünkben a súlyvonalakat $2 : 1$ arányban osztó pontra.

A (3) jobb oldalán álló $1/4$, $-1/16$ együtthatók helyére a 3 dimenziós térben $1/3$ és $-1/9$ lépett, 2 dimenzióban pedig $1/2$ és $-1/4$, vagyis $n = 4, 3, 2$ esetében egyformán $1/n$, ill. $-1/n^2$.

Barra Károly (Salgótarján, Madách I. Gimn., IV. o. t.)

Bálványos Zoltán (Makó, József A. Gimn., III. o. t.)