I. megoldás. 1. Először olyan területfelező egyenest keresünk D-n át, amely az AB, AC szakaszt metszi egy E, ill. F pontban. Jelöljük az adott 0,32 és 0,36 arányszámot p_c-vel, ill. p_b-vel, ekkor a DAE és DAF háromszögnek D-ből húzott magassága $p_c m_c$, ill. $p_b m_b$, ahol m_c, m_b az eredeti háromszög C-ből, ill. B-ből húzott magassága. Legyen továbbá $AE/AB = q_c$ és $AF/AC = q_b$, vagyis $AE = q_c AB = q_c c$, $AF = q_b AC = q_b b$, és az AEF háromszög F-ből induló magassága $q_b m_c$.

Minthogy $AED + ADF = AEF$ (a háromszögek területét ugyanúgy jelöltük, mint magukat a háromszögeket), azért

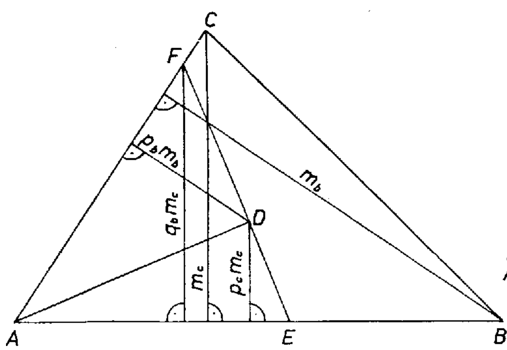
$$\frac{q_c c \cdot p_c m_c}{2} + \frac{q_b b \cdot p_b m_b}{2} = \frac{q_c c \cdot q_b m_c}{2},$$

amit $ABC = cm_c/2 = bm_b/2$-vel osztva

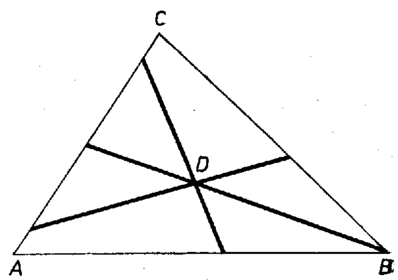
$$q_c p_c + q_b p_b = q_c q_b,$$

és innen

(1) $$q_b = \frac{q_c p_c}{q_c - p_b}.$$



1. ábra



2. ábra

Ezt az $AEF = ABC/2$, egyszerű alakítással $q_b q_c = 1/2$ követelménybe helyettesítve

$$\frac{p_c q_c^2}{q_c - p_b} = \frac{1}{2}, \qquad 2p_c q_c^2 - q_c + p_b = 0,$$

(2) $$q_c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8p_b p_c}}{4p_c}.$$

Ez csak akkor felel meg követelményünknek, ha teljesül $0 < q_c \le 1$, továbbá (1)-ből $0 < q_b \le 1$.

Esetünkben $p_c = 0{,}32$ és $p_b = 0{,}36$ felhasználásával mindkét értékpár megfelel, ugyanis

$$q_c' = \frac{9}{16}, \quad q_c'' = 1;$$

(3) $$q_b' = \frac{8}{9}, \quad q_b'' = \frac{1}{2}.$$

Ezzel két területfelező egyenest kaptunk D-n át, könnyű látni, hogy az utóbbi AB-t a B végpontban metszi és ez a felező az eredeti háromszög B-ből induló BB_0 súlyvonala.

2. Eredményeink a betűzés kellő megváltoztatásával felhasználhatók azoknak a területfelezőknek a meghatározására, amelyek a B-ből és a C-ből kiinduló oldalszakasz-párt metszik át, ehhez csupán azt kell tudnunk, az A-ból induló magasságnak hányadrészét teszi ki D-nek BC-től való távolsága; legyen ez az arányszám p_a. Ezzel kifejezve a $DAB + DBC + DCA = ABC$ összefüggés így alakul:

$$\frac{cp_c m_c}{2} + \frac{ap_a m_a}{2} + \frac{bp_b m_b}{2} = \frac{cm_c}{2} = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2},$$
$$p_a + p_b + p_c = 1, \quad \text{tehát} \quad p_a = 0{,}32.$$

Mármost észrevéve, hogy $p_a = p_c$, a CB és CA oldalszakaszokat metsző területfelezőre az A és C, valamint a és c betűk cseréje után ismét a (3) értékeket kapjuk, a második értékpár azonban újra a BB_0 súlyvonalat adja meg.

Végül a BA, BC oldalszakaszpárt metsző területfelező egyenest nem kapunk, mert az A, B, C betűk helyére mindenütt rendre B-t, C-t, A-t írva (2)-ből és (1)-ből

$$q_a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8p_c p_a}}{4p_a}, \qquad q_a = \frac{q_a p_a}{q_a - p_c},$$

és az egyik megoldásban $q'_a > 1$, a másikban $q''_c > 1$ (egyébként $q''_c = q'_a$).

A talált 3 területfelezőt a 2. ábra mutatja.

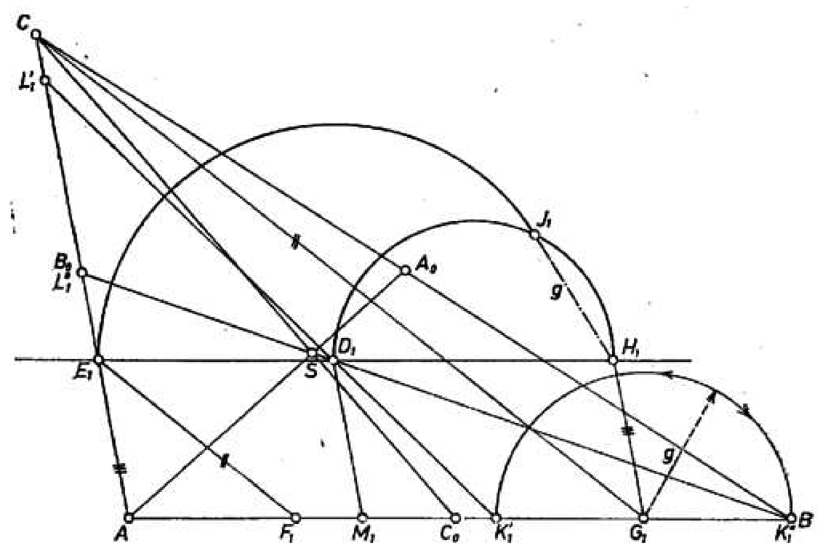
Kovalszky Róbert (Budapest, Landler J. Gimn.)

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy az ABC háromszög alak szerint nem volt meghatározva, eredményünk bármely háromszögnek a p_b, p_c arányokkal meghatározott D pontjára érvényes.

2. Az adott arányértékek mellett D mindig rajta van a háromszög B-ből induló BB_0 súlyvonalán, a másik két területfelező pedig egymás képe abban a ferde tükrözésben, melyben a megfelelő pontokat összekötő szakasz párhuzamos AC-vel és a köztük levő szakaszt BB_0 felezi.

II. megoldás (vázlat). A kitűzésben ajánlott 1455. feladat egy adott D ponthoz egyetlen területfelező egyenes szerkesztését írta le és bizonyította be, viszont (a III. rész végén) utalt arra, hogy a háromszögön belüli D_1 esetében – amilyen az itteni D pont is – egy további területfelező is lehetséges, a szerkesztés utolsó lépésében felmérendő szakaszt az ellentétes irányban felmérve. Ez – mint látni fogjuk – esetünkben is ad második megoldást.

A mondott szerkesztés lépéseit az 1455. feladat bizonyítása szerinti számítással követjük (3. ábra).



3. ábra

A D_1-en átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesnek AC-vel való E_1 metszéspontjára nézve az $AE_1D_1M_1$ paralelogrammából a feltevés szerint $E_1D_1 = AM_1 = 0{,}36\ AB = 9AB/25$, másrészt $AE_1 = 0{,}32AC = 8AC/25$.

Arra a G_1 pontra nézve, melyet az AB-t negyedelő F_1 pont és E_1 összekötő egyenesével C-n át húzott párhuzamos metsz ki AB-ből, hasonlóság alapján

$$AG_1 = AF_1 \cdot \frac{AC}{AE_1} = \frac{AB \cdot AC}{4AE_1} = \frac{25}{32}AB,$$

továbbá mivel H_1 paralelogrammává egészíti ki E_1AG_1-et,

$$D_1H_1 = E_1H_1 - E_1D_1 = AG_1 - E_1D_1 = AB\left(\frac{25}{32} - \frac{9}{25}\right).$$

Így a körzővel átviendő szakasz hossza, a D_1H_1 átfogóval és D_1E_1 befogóval szerkesztett derékszögű háromszög másik befogója:

$$g = \sqrt{D_1H_1^2 - D_1E_1^2} = AB\sqrt{\left(\frac{25}{32} - \frac{9}{25}\right)^2 - \left(\frac{9}{25}\right)^2} = AB\sqrt{\frac{25}{32}\left(\frac{25}{32} - \frac{18}{25}\right)} = \frac{7}{32}AB.$$

Ezt G_1-től A felé felmérve kapjuk a D_1-en átmenő, az eljárás szerinti területfelező egyenesnek AB-n levő K'_1 pontját:

$$AK'_1 = AG_1 - g = \frac{9}{16}AB,$$

viszont az ellentétes irányú felméréssel is az AB szakasz egy pontját, ti. a végpontját kapjuk: $AK''_1 = AG_1 + g = AB$, tehát K''_1 azonos B-vel. Végül a felezőknek az AC szakaszon levő L_1 pontjára, hasonló háromszögekből

$$AL'_1 = AE_1 \cdot \frac{AK'_1}{MK'_1} = \frac{8}{9}AC, \qquad AL''_1 = AE_1 \cdot \frac{AK''_1}{MK''_1} = \frac{1}{2}AC.$$

A kapott második területfelező egyenes azonos a BB_0 súlyvonallal. Így D_1 az 1455. feladatban vizsgált C_0SB szögtartomány határán van, vagyis a BSA_0 szögtartományhoz is hozzátartozik, ezért az eljárást az A és C betűk felcserélésével végrehajtva újabb területfelezőt kapunk.

(Bizonyítani kellene még, hogy az így talált 3-nál több területfelező nem lehetséges; ezt itt mellőzzük.)