

I. Olyan n kitevőt kell keresnünk, amelyre

$$(1) \quad 1,968 \cdot 10^m < 2^n < 1,969 \cdot 10^m,$$

ahol $m \geq 3$, természetes szám. Innen, mivel a $\lg x$ függvény szigorúan monoton növekvő,

$$(2) \quad \begin{aligned} m + \lg 1,968 &< n \cdot \lg 2 < m + \lg 1,969, \\ 0,293\,95 &< n \cdot 0,301\,03 - m < 0,294\,25. \end{aligned}$$

(Az alsó korlátot az iskolai új függvénytáblázat 0,2940 mantissza adatából képeztük, tudva, hogy kerekített, hasonlóan a felső korlátot 0,2942-ből; $\lg 2$ -nek 5 tizedesre kerekített értékét pedig a $\lg 1024 = \lg 2^{10} = 10 \lg 2 = 3,0103$ adatából.)

A feladat állítása szerint $m > 2^k = 2^8 = 256$, emiatt

$$\begin{aligned} n \cdot 0,301\,03 &> m > 256, \\ n &> \frac{256}{0,301\,03} = 850,4, \end{aligned}$$

azaz $n \geq 851$. Mármint $n = 851$ esetén $n \cdot 0,301\,03 = 256,176\,53$, tehát 2^n logaritmusában a mantissza 0,176 53, kisebb a (2)-beli alsó korlátnál. A megoldást $n = 851$ közelében keresve, addig kell növelnünk n -et, amíg a mantissza eleget tesz (2)-nek. $n = 852$ esetén $0,176\,53 + 0,301\,03 = 0,477\,56$ -ra növekszik, és ez már sok. A mantissza úgy csökken, hogy ha n -et 3-mal növeljük, hiszen így a hatvány logaritmus

$$3 \cdot 0,301\,03 = 0,903\,09 = 1 - 0,096\,91$$

értékkel növekszik, a mantissza 0,096 91-del csökken (ha ti. nagyobb volt ennél). Így 855-re növelve n -et, a mantissza 0,380 65, $n = 858$ esetén pedig 0,283 74, ami már majdnem megfelelő, de ismét kevés. Kis növelést érünk el n -nek 10-zel való növelésével, hiszen láttuk, hogy 2^{10} mantisszája 0,0103. Így (2)-nek eleget tevő mantisszát kapunk:

$$868 \cdot 0,301\,03 - 261 = 0,294\,04.$$

II. Ez azonban még nem biztosítja, hogy az $n = 868$ -as kitevő (1)-nek is eleget tesz. Valóban, (2)-ben a középső tag pontossága a 868-cal való szorzás során lényegesen romlik. Ellenőrzésül használhatunk hétjegyű logaritmustáblát, vagy 2^{868} elegendő számú kezdő jegyének kiszámításával ellenőrizhetjük eredményünket. Az utóbbi történhet pl. a következő lépésekben:

$$\begin{aligned} 2^{13} &= 8 \cdot 1024 = 8192, & 2^{14} &= 2 \cdot 2^{13} = 16\,384, \\ 2^{27} &= 2^{13} \cdot 2^{14} = 134\,217\,728, \\ 180\,143\,96 \dots &< 2^{54} = (2^{27})^2 < 180\,144\,00 \dots \\ 324\,518\,46 \dots &< 2^{108} = (2^{54})^2 < 324\,518\,61 \dots \\ 105\,312\,23 \dots &< 2^{216} = (2^{108})^2 < 105\,312\,33 \dots \\ 210\,624\,46 \dots &< 2^{217} = 2 \cdot 2^{216} < 210\,624\,66 \dots \\ 443\,626\,63 \dots &< 2^{434} = (2^{217})^2 < 443\,627\,48 \dots \\ 196\,804\,58 \dots &< 2^{868} = (2^{434})^2 < 196\,805\,35 \dots \end{aligned}$$

A negyedik lépéstől kezdve 8 jegyre lefelé és fölfelé kerekítettük a szorzatokat. Ezek szerint az $n = 868$ kitevő eleget tesz (1)-nek.

Megjegyzések. 1. Ha nem használtuk volna fel a feladat $m > 256$ közlését, akkor eljárásunkat a 851, 852, ... kitevők helyett az 1, 2, ... sorozattal végezve beláthattuk volna, hogy az $n = 868$ kitevő az első, melyre 2^n első jegyei 1968...

2. Azt, hogy a (2) egyenlőtlenség a képezéséből eredő pontatlanságok ellenére jó eredményre vezetett, az a szerencsés körülmény magyarázza, hogy $\lg 2$ értéke 7 tizedesre is az ott használt érték: 0,301 0300 (10 jegyre pedig 0,301 029 9957). Az ellenőrzést viszont nehezítette, hogy 2^{868} -ban az előírt 1, 9, 6, 8 jegyeket 0 követi.