

I. A követelményt így is kimondhatjuk: (1) kifejtett alakjában nem léphetnek föl x -nek $n + 1$ -nél kisebb kitevőjű hatványai, vagyis együttthatójuk 0-val egyenlő, ide értve a 0 kitevőjű hatványt, az állandót is. Egyszerűbb, ha ezt (1)-nek (-1) -szeresére írjuk fel:

$$\begin{aligned} x^0 \text{ együttthatójából:} & \quad a_0^2 - 1 = 0, \\ x \text{ együttthatójából:} & \quad 2a_0a_1 - 1 = 0, \\ x^2 \text{ együttthatójából:} & \quad 2a_0a_2 + a_1^2 = 0, \\ x^3 \text{ együttthatójából:} & \quad 2(a_0a_3 + a_1a_2) = 0, \\ x^4 \text{ együttthatójából:} & \quad 2(a_0a_4 + a_1a_3) + a_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Nem lesz vagylagosság a kitevő páros vagy páratlan volta miatt, ha az utóbbi két egyenletet így írjuk:

$$\begin{aligned} x^3\text{-ből} & \quad 2a_0a_3 = -(a_1a_2 + a_2a_1), \\ x^4\text{-ből} & \quad 2a_0a_4 = -(a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1), \end{aligned}$$

eszerint x^k ($2 \leq k \leq n$) együttthatójának eltűnéséből minden esetben

$$(2) \quad 2a_0a_k = -(a_1a_{k-1} + a_2a_{k-2} + \dots + a_{k-2}a_2 + a_{k-1}a_1).$$

Az első egyenletből $a_0 = \pm 1$. Minden egyes további egyenletben rendre egyetlen új együtttható lép fel: $a_1, a_2, \dots$, így mindegyikük meghatározható abból az egyenletből, ahol először föllép, hiszen az egyenletben föllépő, kisebb indexű együttthatók már ismertek a föntebbi egyenletekből. Az első négy együtttható, mindig figyelembe véve, hogy $a_0^2 = 1$:

$$(3) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2a_0} = \frac{a_0}{2}, \\ a_2 &= \frac{a_1^2}{2a_0} = -\frac{1}{8a_0^3} = -\frac{1}{8a_0} = -\frac{a_0}{8}, \\ a_3 &= -\frac{a_1a_2}{a_0} = \frac{1}{16a_0} = \frac{a_0}{16}, \\ a_4 &= -\frac{a_2^2 + 2a_1a_3}{2a_0} = -\frac{5}{128a_0} = -\frac{5a_0}{128}. \end{aligned}$$

II. Zárt kifejezést adunk az a_k ($2 \leq k \leq n$) együttthatóra. Ehhez megjegyezzük, hogy a fentiekből az a_j/a_{j-1} , hányados értéke $j = 2, 3$ és 4 esetére

$$(4) \quad \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{4}; \quad \frac{a_3}{a_2} = -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}, \quad \frac{a_4}{a_3} = -\frac{5}{8},$$

és mindháromnak közös alakja:

$$(5) \quad \frac{a_j}{a_{j-1}} = -\frac{2j-3}{2j}.$$

Feltesszük, hogy ez fennáll minden $2 \leq j \leq k-1$ indexre, és megmutatjuk, hogy ekkor fennáll $j = k$ esetére is. Tekintsük a következő összegeket:

$$\begin{aligned} S &= a_1a_{k-1} + 2a_2a_{k-2} + 3a_3a_{k-3} + \dots + (k-2)a_{k-2}a_2 + (k-1)a_{k-1}a_1, \\ S' &= (k-1)a_{k-1}a_1 + (k-2)a_{k-2}a_2 + (k-3)a_{k-3}a_3 + \dots + 2a_2a_{k-2} + a_1a_{k-1}. \end{aligned}$$

Nyilvánvalóan $S' = S$, és így összegük, (2) figyelembevételével

$$(6) \quad 2S = k(a_1a_{k-1} + a_2a_{k-2} + \dots + a_{k-2}a_2 + a_{k-1}a_1) = -2ka_ka_0.$$

Alakítsuk másrészt a szorzatok első két tényezőjét az (5) feltevés

$$ja_j = -\frac{2j-3}{2}a_{j-1}$$

alakja alapján a következőképpen (kivéve természetesen, ha az első két tényezőben a_1 szerepel)

$$\begin{aligned} S &= a_1a_{k-1} - \frac{1}{2}[a_1a_{k-2} + 3a_2a_{k-3} + 5a_3a_{k-4} + \dots + (2k-7)a_{k-3}a_2 + (2k-5)a_{k-2}a_1], \\ S' &= -\frac{1}{2}[(2k-5)a_{k-2}a_1 + (2k-7)a_{k-3}a_2 + \dots + 3a_2a_{k-3} + a_1a_{k-2}] + a_1a_{k-1}. \end{aligned}$$

Ezekből, észrevéve, hogy a zárójelben annak a kifejezésnek a (-1) -szerese adódik, ami (2) jobb oldalán áll, ha k helyére $k-1$ -et írunk; tehát értéke $-2a_0a_{k-1}$, másrészt $2a_1 = 1/a_0 = a_0$ figyelembevételével

$$(7) \quad \begin{aligned} S + S' &= 2S = 2a_1a_{k-1} - (k-2)[a_1a_{k-2} + a_2a_{k-3} + \dots + a_{k-3}a_2 + a_{k-2}a_1] = \\ &= a_0a_{k-1} + 2(k-2)a_0a_{k-1} = (2k-3)a_0a_{k-1}. \end{aligned}$$

Végül (6) és (7) alapján, mivel $a_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} -2ka_ka_0 &= (2k-3)a_0a_{k-1}, \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} &= -\frac{2k-3}{2k}, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A (4) értékek és bizonyításunk alapján (5) fennáll $j = 5$ esetére, és a teljes indukciós bizonyításmód alapján minden az n -nél nem nagyobb indexre.

Mármint (5)-öt alkalmazva egymás után a $k, k-1, k-2, \dots, 2$ indexekre (vagyis $k-1$ -szer):

$$\frac{a_k}{a_1} = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2k-3}{2k} \cdot \frac{2k-5}{2(k-1)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2 \cdot 2},$$

továbbá a törtek szorzatát a nevezőjével bővítve, valamint a nevező tényezőinek 2-es tényezőit összegyűjtve, a faktoriális jelölésével, végül (3) figyelembevételével

$$\begin{aligned} a_k &= a_1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{(2k-2)!}{[2^{k-1} \cdot (k-1)!]^2} = a_0 \frac{(-1)^{k-1} \cdot (2k-2)!}{2^{2k-1} k \cdot [(k-1)!]^2} = \\ &= a_0 (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} \cdot \frac{1}{2^{2k-1}}, \end{aligned}$$

vagy másképpen, a binomiális együttható jelölésével, többféleképpen is

$$(8) \quad \begin{aligned} a_k &= a_0 \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} = a_0 \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(k-1)} \binom{2k-2}{k-2} = \\ &= a_0 \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1) \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-1}{k}. \end{aligned}$$

Lényegtelen, hogy a_0 -nak melyik értékét vesszük, hiszen eredményünk szerint a_0 az (1)-beli második zárójelből kiemelhető és az $a_0^2 = 1$ tényező elhagyható.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gyak G.) dolgozatából, egyszerűsítésekkel

Megjegyzések. 1. Akár (5), akár (8) eredményünk alapján könnyebben számíthatjuk ki a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \frac{5x^4}{2^7} + \frac{7x^5}{2^8} - \frac{21x^6}{2^{10}} + \frac{33x^7}{2^{11}} - \frac{429x^8}{2^{15}} + \frac{715x^9}{2^{16}} - \frac{2431x^{10}}{2^{18}} + \dots$$

kifejezés egymás utáni együtthatóit, mint azt az 1109. gyakorlatban)¹ láttuk.

A talált együtthatókat beírva (1) ilyen alakú:

$$b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2} + \dots + b_nx^{2n} = x^{n+1}(b_1 + b_2x + \dots + b_nx^{n-1}),$$

és ha x abszolút értékben közel áll 0-hoz, ez a kifejezés elhanyagolható, ezért

$$\begin{aligned} 1+x &\approx (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)^2, \\ \sqrt{1+x} &\approx a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \end{aligned}$$

A közelítés hibájának megbecslése itt nem lehet célunk, csak megjegyezzük, hogy a hiba annál kisebb, minél kisebb abszolút értékű x -ről van szó (mindenesetre $|x| < 1$), másrészt hogy minél nagyobb n -ig megyünk el.

Lempert László

2. Számos dolgozat csak a fent közölt a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 együtthatókat számította ki, a többiek kiszámítását csak vázolta, ill. lehetőségként megemlítette. Ezek a versenyzők nem vették észre, hogy már az idézett 1109. gyakorlat kitűzésében szerepelt a_1 is, és ott a gyakorlat tárgya éppen két további együttható meghatározása volt.

¹Lásd a megoldást K. M. L. 35 (1967) 151. o.

Az $a_0, a_1, \dots, a_6$ együtthatók szerepeltek a mondott (továbbá az 1029.) gyakorlathoz fűzött külön megjegyzésekben² is. Ez is elkerülte a figyelmet. A Szerkesztő Bizottság – abban az elgondolásban, hogy a feladatmegoldók emlékeznek az illető tárgykörben a közelmúltban megjelent megoldásokra és cikkekre —, a (8), vagy hasonló explicit kifejezés megállapítását várta, ha élesen nem mondta is ki.

3. *Lempert László* megjegyezte, hogy $k \geq 4$ esetére az

$$a_k \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^{2k-1} = C_k$$

számok adják meg a választ a következő kérdésre: hányféleképpen lehet felbontani egy konvex $k+1$ -szöget egymást nem metsző átlószakaszok berajzolásával háromszögekre (vagyis úgy, hogy minden keletkező háromszög csúcsai a $k+1$ -szög csúcsai közül valók legyenek). – Ezt az eredményt az 1187. feladathoz³ fűzött 2. megjegyzés n -szögre

$$F_n = \frac{1}{n-2} \cdot \binom{2n-4}{n-3}$$

alakban mondta ki, a (2)-höz hasonló felépítésű

$$F_n = F_{n-1} + F_3 \cdot F_{n-2} + F_4 \cdot F_{n-3} + \dots + F_{n-3} \cdot F_4 + F_{n-2} \cdot F_3 + F_{n-1}$$

kifejezés átalakítása alapján. (Maga az 1187. feladat csak a szabályos 7-szög felbontási lehetőségeinek számát kérdezte.)

² *Tusnády Gábor*: A négyzetgyökkvonásról, K. M. L. 35 (1967) 97 – 99. o.

³ K. M. L. 26 (1963) 126. o.