α) Az (1) táblázat $3 \le n \le 7$ indexű és a (2) táblázat $4 \le n \le 7$ indexű sorai kielégítik a (3)-ban leírt képezési szabályt. Legyenek az (1)-nek ilyen, vagy az így képezett folytatásnak $n-2$, $n-1$, és n indexű sorában az együtthatók:

$$\begin{array}{l|llll} n-2 & 1 & c_1 & c_2 & \dots \\ n-1 & 1 & b_1 & b_2 & \dots \\ n & 1 & a_1 & a_2 & \dots \end{array}$$

vagyis, $C = 2\cos x$ megfelelő hatványait is kiírva:

(4) $$C_{n-2} = 2\cos(n-2)x = C^{n-2} + c_1 C^{n-4} + c_2 C^{n-6} + \dots$$

(5) $$C_{n-1} = 2\cos(n-1)x = C^{n-1} + b_1 C^{n-3} + b_2 C^{n-5} + \dots$$

(6) $$C_n = 2\cos nx = C^n + a_1 C^{n-2} + a_2 C^{n-4} + \dots$$

Minthogy ezekre

(7) $$a_1 = b_1 - 1, \qquad a_2 = b_2 - c_1,$$

és általában $i = 2, 3, \dots$ esetén

(8) $$a_i = b_i - c_{i-1},$$

másrészt (4)–(6) szerint b_1 és b_i a C változó 1-gyel kisebb kitevőjű hatványának együtthatója, mint a_1, ill. a_i és c_{i-1}, azért (7)-ből és (8)-ból a következő összefüggést sejtjük:

(9) $$C_n = C \cdot C_{n-1} - C_{n-2}.$$

Ezt fogjuk bizonyítani.

Valóban, a

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

azonosság alapján

$$\begin{aligned} C_n + C_{n-2} &= 2\cos nx + 2\cos(n-2)x = 4\cos(n-1)x\cos x = \\ &= (2\cos x)\big(2\cos(n-1)x\big) = C \cdot C_{n-1}, \end{aligned}$$

tehát sejtésünk helyes.

(9) alapján a C változó (6) alatti polinomja az (5) alatti polinom C-szeresének és a (4) alatti polinomnak a különbségével egyenlő:

$$C^n + a_1 C^{n-2} + a_2 C^{n-4} + \dots = C(C^{n-1} + b_1 C^{n-2} + b_2 C^{n-4} + \dots) - (C^{n-2} + c_1 C^{n-4} + c_2 C^{n-6} + \dots).$$

Ez akkor teljesül, ha C megfelelő hatványainak az együtthatói a két oldalon egyenlők:

C^n	együtthatója a bal oldalon:	1,	a jobb oldalon: 1;
C^{n-1}	együtthatója a bal oldalon:	0,	a jobb oldalon: 0;
C^{n-2}	együtthatója a bal oldalon:	a_1,	a jobb oldalon: $b_1 - 1$;
		. . .	
C^{n-2i}	együtthatója a bal oldalon:	a_i,	a jobb oldalon: $b_i - c_{i-1}$;
C^{n-2i-1}	együtthatója a bal oldalon:	0,	a jobb oldalon: 0;
		. . .	

(9) tehát következik a (8) alatti képezési szabályból. Így ha (4) és (5) azonosság, és a bennük szereplő együtthatókból (8) alapján állítjuk elő a (6) alatti együtthatókat, akkor (6) is azonosság.

β) Az állítás szerint (7) és (8) akkor is érvényesek, ha (4)–(6) bal oldalára rendre S_{n-2}-t, S_{n-1}-t, S_n-t írjuk, és a $c_1, c_2, \dots, b_1, b_2, \dots, a_1, a_2, \dots$ együtthatókon a (2) táblázat $n-2$, $n-1$, ill. n indexű sorának együtthatóit értjük. Ezért a (9)-nek megfelelő

$$S_n = C \cdot S_{n-1} - S_{n-2}$$

összefüggést is igazolnunk kell. Valóban, az előbbihöz hasonlóan

$$S_n + S_{n-2} = \frac{\sin nx + \sin(n-2)x}{\sin x} = \frac{2\sin(n-1)x\cos x}{\sin x} =$$

$$2\cos x \cdot \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} = C \cdot S_{n-1}.$$

γ) Már csak azt kell belátnunk, hogy a táblázatoknak (3) alapján nem képezhető elemei, vagyis az első két sor számai helyesek. Ezek ismert azonosságok alapján közvetlenül igazolhatók:

$$\begin{aligned} 2\cos 2x =& 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(2\cos^2 x - 1) = (2\cos x)^2 - 2 = C^2 - 2; \\ \frac{\sin 2x}{\sin x} =& 2\cos x = C; \\ \frac{\sin 3x}{\sin x} =& \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x = \\ & 3 - 4(1-\cos^2 x) = (2\cos x)^2 - 1 = C^2 - 1. \end{aligned}$$

Ezzel a feladat mindegyik állítását igazoltuk.

Nagy Zsigmond (Budapest, Kaffka M. Gimn.)

Megjegyzések. 1. A (2) táblázatot 4 sorral kiegészítve a következőket kapjuk: 1, -6, 10, -4; 1, -7, 15; -10, 1; 1, -8, 21, -20, 5; 1, -9, 28, -35, 15, -1, és a legutóbbi sor együtthatói megfelelnek az 1508. feladatban[1] látott $\sin 11\varphi = \sin\varphi(1024\cos^{10}\varphi - 2304\cos^8\varphi + 1792\cos^6\varphi - 560\cos^4\varphi + 60\cos^2\varphi - 1)$ előállításnak.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek a feladat egybevetését a Matematikai és Fizikai Társulat 1899. évi tanulóversenyének 1. feladatával[2].

[1] K. M. L. 35 (1967) 130. o.

[2] Lásd: *Kürschák József-Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János:* Matematikai versenytételek, I. rész, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 46–51. o.