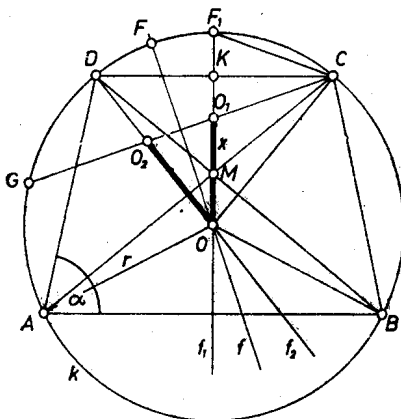


I. megoldás. a) A $CDM = H_1$ háromszög beírt körének O_1 középpontja rajta van H_1 és az $ABCD = T$ trapéz közös f_1 szimmetriatengelyén. f_1 átmegey a T köré írható k kör O középpontján is, továbbá az A pontot nem tartalmazó CD ívet annak F_1 felezőpontjában metszi (1. ábra).



1. ábra

Az $ACD = H_2$ egyenlő szárú háromszög szimmetrikus k -nak D -ből kiinduló f_2 átmérőjére, így f_2 átmege a H_2 -be beírt kör O_2 középpontján is.

f_1 és f_2 szimmetrikusak a rövidebb DF_1 ív F felezőpontján átmenő f átmérőre, hiszen f felezi az általuk bezárt szöget. Az F_1C ívet f -re tükrözve a DG ívet kapjuk, ahol a B -t nem tartalmazó DG és DA ívek egyirányúak, és DG egyenlő a DA ívvel egyenlő CD ív felével, G tehát felezi a DA ívet. Emiatt CG felezi a H_1 és H_2 háromszögek C csúcsnál levő közös szögét, és így átmegy az O_1 , O_2 pontokon. Az f -re tükrözve tehát az f_1 és CG egyenesek O_1 metszéspontja átmegy az f_2 és CG egyenesek O_2 metszéspontjába. Ebből – mivel f átmegy O -n – következik a bizonyítandó $OO_1 = OO_2$ egyenlőség.

b) Legyen $O_1O = x$, $OA = r$, $\angle BAD = \alpha$, és a CD oldal felezőpontja K . Ekkor $\angle DOK = \angle DOC/2 = \angle DOB/4 = \alpha/2$, másrészt, mivel $F_1CD = DCG = F_1CO_1/2$, ezért K az $O_1F_1 = r - x$ szakaszt is felezi; ennél fogva a DOK derékszögű háromszögből

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos DOK \triangleleft = \frac{OK}{OD} = \frac{OO_1 + O_1K}{OD} = \frac{x + \frac{r-x}{2}}{r} = \frac{x+r}{2r},$$

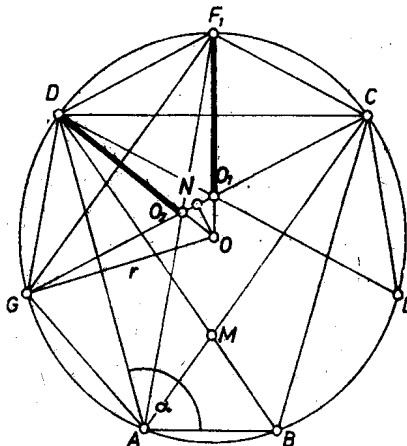
és innen

$$(1) \quad x = r \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right).$$

(Tusnády Gábor)

Megjegyzés. Nem kellett felhasználnunk, hogy $AB > CD$, ezért bizonyításunk AB és CD bármilyen nagyságviszonya esetén érvényes. Ugyanígy x kifejezése is, mert $COD \sphericalangle = AOD \sphericalangle = BOC \sphericalangle = \alpha$, így a C -t tartalmazó AOB szög mértékszáma $3\alpha < 360^\circ$, ezért $\alpha/2 < 60^\circ$, tehát (1)-ben r szorzója pozitív.

II. megoldás. *a)* Tovább is a fenti jelöléseket használjuk, és O_1 -et úgy tekintjük, mint a H_1 -beli C és D szögek felezőinek metszéspontját, O_2 -t pedig mint a H_2 -beli C és A szögek felezőinek metszéspontját. Eszerint DO_1 átmege az A -t nem tartalmazó BC ív L felezőpontján, AO_2 pedig F_1 -en (2. ábra).



2. ábra

A föltevésék szerint a C -t tartalmazó AB ívet a G, D, F_1, C, L pontok egyenlő részekre osztják, emiatt az $AGDF_1, GDF_1C, DF_1CL$ négyszögek egybevágó húrtrapézok, következésképpen $GD \parallel AF_1, DF_1 \parallel GC, F_1C \parallel DL$. Így a DGO_2F_1 és DF_1CO_1 négyszögek egybevágó rombuszok, megfelelő átlóik egyenlők: $DO_2 = F_1O_1$. Mindegyik átló meghosszabbítása átmegy O -n, mert pl. a DO_2 egyenes a GF_1 húr felező merőlegese, ezért a DO, F_1O sugarak további szakaszaira $O_2O = O_1O$, amit bizonyítanunk kellett.

b) A fentiek szerint az O_1O_2 szakasz N felezőpontja egyszersmind CG -t is felezi, így az OO_2N és ONG derékszögű háromszögekből

$$x = O_2O = \frac{ON}{\cos O_2ON} = \frac{r \cos GON}{\cos O_2ON} = r \frac{\cos 3\alpha/4}{\cos \alpha/4} = r(4 \cos^2 \alpha/4 - 3) = r(2 \cos \alpha/2 - 1).$$

(Felhasználtuk a bármely β szögre fennálló

$\cos 3\beta = \cos 2\beta \cos \beta - \sin 2\beta \sin \beta = 4 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta, 2 \cos^2 \beta = 1 + \cos 2\beta$ azonosságokat, továbbá hogy $\alpha/4 < 30^\circ$, így $\cos \alpha/4 \neq 0$.)