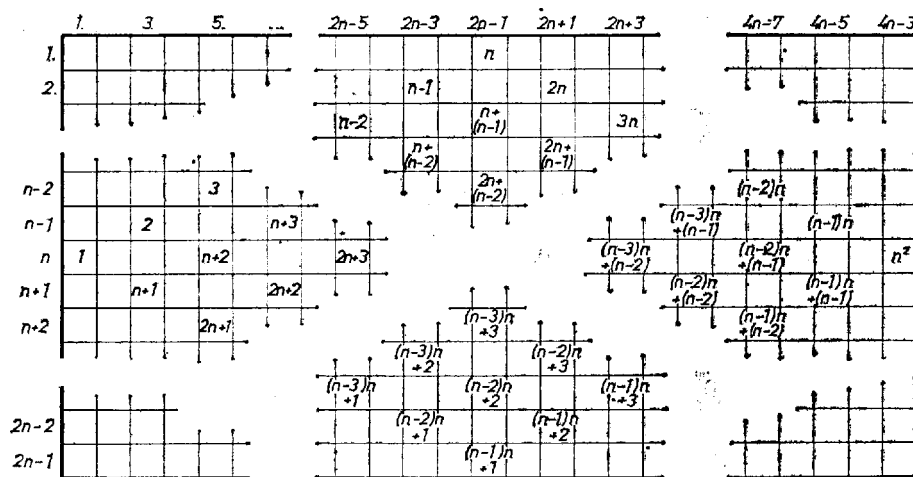


I. A bélyegző az $1, 2, \dots, n^2$ számok mindegyikét egyszer tartalmazza, így bármelyik számunknak a papíron való két előfordulása két különböző lenyomatba tartozik bele, tehát a két megfelelő mezőnek mind a soraihoz, mind az oszlopaihoz tartozó sorszámok különbsége az n számnak többszöröse (természetesen a 0-t is beleértve). Így ha a papírra egy n sorból és n oszlopból álló négyzet alakú keretet teszünk – oldalaival a lenyomatok vonalaira –, akkor egyetlen szám sem látható kétszer a kereten belül, hiszen a keretbeli sorok, oszlopok sorszámai közti különbségek legnagyobbika $n - 1$, ti. az alsó és felső sor, ill. a jobb szélső és a bal szélső oszlop sorszámai között. Nem lehet viszont, hogy számaink valamelyike ne forduljon elő a keretben. Ha ugyanis a számnak egy előfordulását megpróbáljuk kirekeszteni a keretből úgy, hogy ennek pl. a bal oldalvonalát áttoljuk rajta (a kirekesztendő szám mezejének jobb oldal vonalára), akkor a számnak n oszloppal jobbra levő előfordulása belép a keretbe a jobb oldali oldalvonalon át, és ugyanez áll a sorokra is.



1. ábra

Megmutatjuk azt is, hogy a keretben látható n^2 mező mindegyike egy és csak egy számot tartalmaz, a lenyomatok nem fedik át egymást, vagyis helyes „a papír megtöltött részéről” beszélni.

Mivel a bélyegző sorainak száma $2n - 1$, azért egymásba csak olyan két lenyomat sorai nyúlhatnak, amelyek sorszámainak különbsége n . Elég annak a hatását tekinteni, ha az 1. lenyomathoz képest az alsó felét toljuk föl n sorral. Ekkora középső oszlop – ti. az $n, n + (n - 1), \dots, (n - 1) \cdot n + 1$, számokat tartalmazó oszlop – alsó felének számai üres közbülső mezőkre jutnak, mert az 1. lenyomat ezen oszlopában a mezők váltakozva foglaltak és üresek, a foglalt mezők sorának sorszámai (felülről értve) páratlanok, az üreseké párosak, a 2. lenyomatban viszont n -nel – egy páratlan számmal – kisebbek, tehát a 2. lenyomatbeli számok páros sorszámú sorba, azaz üres mezőre jutnak. Így pedig a 2. lenyomat többi számai sem juthatnak foglalt mezőkre, mert a foglalt mezők minden sorban 4 oszlopponként követik egymást, és ennél fogva üres mezőtől jobbra és balra 4 oszloppal ismét üres mezőt találunk.

A fölhasznált állítások a beírási utasításból adódnak: egy számtól a bélyegzőn úgy jutunk el a közvetlen alatta levő számhoz – amennyiben van alatta szám –, hogy egyszer balra lefelé és egyszer jobbra lefelé lépünk két oszloppal és egy sorral (és a két lépés sorrendje föl is cserélhető), tehát a közvetlen alatta levő szám két sorral lejjebb áll; azt is látjuk ebből, hogy a köztük levő sorbeli üres mezőtől balra és jobbra is üres áll, és a balra, jobbra második mezők foglaltak, oszlopaik sorszámának különbsége tehát 4.

Mindjárt itt megjegyezzük, hogy meggondolásunk szerint a bélyegzőn minden szám alatt 2 mezővel a nála $(n - 1)$ -gyel nagyobb szám áll, vagy üres mező, és minden számtól jobbra 4 mezővel az $(n + 1)$ -gyel nagyobb szám vagy üres mező, hiszen a jobbra emelkedő (balra süllyedő) lépés 1-gyel növel, ill. csökkent, a másik fajta lépés pedig n -nel.

Áttérve állításunknak a vízszintes eltolásokra vonatkozó részére, elég a $2n$ mezőnyi eltolásokkal foglalkoznunk, hiszen az 1. lenyomat csak páratlan sorszámú oszlopokba visz számokat, ezért az n mezővel jobbra eltoló lenyomat csak páros sorszámúakba és a foglaltság kérdése csak az újabb n mezővel jobbra való eltolás számaira lép fel. Mármost páratlan szám 2-szerese 4-gyel osztva maradékal 2-t ad, ott tehát üres mező van, hiszen csak olyan mező foglalt, amelyre az oszlopok sorszámainak különbsége 4-nek többszöröse, tehát 4-gyel osztva a maradék 0. Az 1. lenyomattól jobbra $4n$ mezővel képezve új lenyomatot, ez már nem nyúlik az elsőbe, mert a bélyegző oszlopainak száma csak $4n - 3$.

Ezzel beláttuk, hogy a lenyomatokat vízszintesen $2n$, függőlegesen n többszöröseivel eltolva nincs átfedés, és ezzel megtöltjük a papír páratlan sorszámú oszlopait. Ugyanez áll egymás között azokra a lenyomatokra, amelyekben vízszintesen az n szám páratlan többszöröseit vesszük eltolásnak.

II. Áttérünk az összegek kérdésére. Legyen j olyan sorszám, amelyre $1 \leq j \leq n$ – vagyis a bélyegző j -edik sora a felső félben van, vagy maga a középső sor –, és számítsuk ki a bélyegző (felülről számított) j -edik és az $n + j$ -edik sorában álló számok összegét, vagyis azokét a számokét, amelyek a papíron egy sorban állnak. Azt kell kapnunk, hogy ez független j -től.

A j -edik sor első száma $n - (j - 1)$, tagjainak száma j , és mint láttuk, tagról tagra $(n + 1)$ -gyel nőnek. Így összegük, a számtani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$(1) \quad \frac{j}{2} \{2(n - j + 1) + (j - 1)(n + 1)\}.$$

Az $(n + j)$ -edik sor első száma $1 + jn$, tagjainak száma $n - j$, mert az n -edik sorban n szám áll (hiszen első száma 1, utolsó száma n^2 , és ehhez $(n^2 - 1) : (n + 1) = (n - 1)$ lépéssel jutunk el) és tovább a sor sorszámát 1-gyel –1-gyel növelve a tagok száma 1-gyel –1-gyel fogy. (Innen is látjuk, hogy a vizsgált két sorban együttevén n szám áll.) Így a $(j + n)$ -edik sor számainak összege

$$\frac{n - j}{2} \{2(1 + jn) + (n - j - 1)(n + 1)\}$$

ami (1)-gyel együtt

$$(2) \quad \frac{n(n^2 + 1)}{2},$$

amint vártuk. (Ez $j = n$ esetére is érvényes, mert ekkor – bár nincs $n + j$ -edik sor, de benne $n - j$, azaz 0 taggal számoltunk.)

Legyen másrészt k olyan páratlan sorszám, melyre $1 \leq k \leq 2n - 1$ – vagyis a bélyegző k -adik oszlopa (az üres oszlopokat is számba véve) a bélyegző bal oldali felében van vagy maga a középső oszlop –, és számítsuk ki a bélyegző k -adik és $(k + 2n)$ -edik oszlopában álló – a fentiek szerint a papíron egy oszlopba kerülő – számok összegét.

A k -adik oszlop felső száma $\frac{k + 1}{2}$ (egész), tagjainak száma ugyanennyi, a $(k + 2n)$ -edik oszlopra pedig ugyanezek a számok $\frac{k + 3}{2} \cdot n$, ill. $\frac{2n - k - 1}{2}$, tehát az összeg – mint $(n - 1)$ differenciájú számtani sorozatok összege:

$$\begin{aligned} \frac{k + 1}{4} \left\{ (k + 1) + \frac{k - 1}{2}(n - 1) \right\} + \frac{2n - k - 1}{4} \left\{ (k + 3) \cdot n + \frac{2n - k - 3}{2}(n - 1) \right\} = \\ = \frac{n(n^2 + 1)}{2}, \end{aligned}$$

függetlenül k -tól és megegyezésben (2)-vel. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

III. Az 1165. gyakorlatban Marci guruló bélyegzőjével azt a számkövezetet kaptuk – lásd az ottani 2. ábrát –, ami az itteni pecsétnek egy oszlopra való tükrözésével állna elő $n = 5$ esetében. Ott láttuk, hogy minden átlós összeg – a keret elhelyezésétől függetlenül – egyezik a sorok és az oszlopok összegével. Ugyanezt tapasztaljuk $n = 7$ esetén (2. ábra), ebben a két esetben bélyegzőnk ún. *minden átlójában bűvös* – az irodalomban bevett idegen kifejezéssel – *páncdiagonális* bűvös kövezetet állít elő.

5	21	30	46	13	22	38	5	21
29	45	12	28	37	4	20	29	45
11	27	36	3	19	35	44	11	27
42	2	18	34	43	10	26	42	2
17	33	49	9	25	41	1	17	33
48	8	24	40	7	16	32	48	8
23	39	6	15	31	47	14	23	39
5	21	30	46	13	22	38	5	21
29	45	12	28	37	4	20	29	45

2. ábra

$n = 9$ esetén mindkét átlós irány mentén csak 3 – 3 átlón annyi az összeg, mint a sorokon és oszlopokon, így a 81 szám közül 9 olyan, hogy a négyzet közepének választva bűvös négyzetet kapunk, ezek mellett a 3. ábrán csillag áll.

67	47	36	16	77	57	37	26	6	67	47
35	15	76	56	45	25	5	66	46	35	15
75	55	44*	24	4	65*	54	34	14*	75	55
43	23	3	64	53	33	13	74	63	43	23
2	72	52	32	12	73	62	42	22	2	72
51	31	11*	81	61	41*	21	1	71*	51	31
10	80	60	40	20	9	70	50	30	10	80
59	39	19	8	69	49	29	18	79	59	39
27	7	68*	48	28	17*	78	58	38*	27	7
67	47	36	16	77	57	37	26	6	67	47
35	15	76	56	45	25	5	66	46	35	15

3. ábra

Megjegyzések. **1.** A 2. és 3. ábrát úgy vágtuk ki a bővös kövezből, hogy a keret közepén a beírt számok közül a középső $(n^2 + 1)/2$ álljon, a vonalak összegének n -edrészre. Ez azt eredményezte, hogy bármely két, a keret középpontjára tükrös helyzetű mezőpáron olyan két szám áll, amelyek összege $n^2 + 1$, vagyis amelyek a beírt számok növekvő felsorolásában előlről és hátulról ugyanannyiadik helyen állnak.

2. A bélyegzőnk elvével keletkező kövezből pandiagonális voltárról lásd ezen számunk 97. oldalán olvasható cikket.