

(1) bal oldala $x \geq 4$ -re van értelmezve. Kipróbálva néhány egész értéket, az $x = 5$ gyökre találunk. További gyökök keresésére lényegesen egyszerűsíthető az egyenlet, ha az egyik négyzetgyök helyett új ismeretlent vezetünk be, ugyanis a gyökök alatt elsőfokú kifejezés áll, s így x az új ismeretlennek polinomja lesz. $\sqrt{x-4}$ helyett célszerű új ismeretlent bevezetni, s mivel ennek értéke az $x = 5$ helyen 1, így $1+t$ -t:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} &= 1+t, \text{ azaz} \\ (2) \quad x &= t^2 + 2t + 5, \text{ ahol } t \geq -1, \end{aligned}$$

mert a gyök nem negatív. Az egyenlet a következő alakú lesz:

$$(3) \quad \sqrt{2t^2 + 4t + 9} = t^2 + t + 3.$$

Ebből négyzetre emeléssel és átrendezéssel a

$$t(t^3 + 2t^2 + 5t + 2) = 0$$

egyenlethez jutunk, aminek $t = 0$ gyökéhez tartozó x -et már főnt megkaptuk, így a további gyökök a következő egyenletből keresendők:

$$f(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 2 = 0,$$

a fenti $t \geq -1$ korlátozást figyelembe véve. $t \geq 0$ esetén $f(t) > 0$, tehát (4)-nek nincs pozitív gyöke. A $(-1, 0)$ intervallumban viszont van, mert $f(-1) = -2 < 0 < 2 = f(0)$, vagyis f értéke az intervallum két végpontjában ellentétes jelű. Éspedig csak egy gyök van, mert ha $-1 \leq t_1 < t_2 \leq 0$, akkor

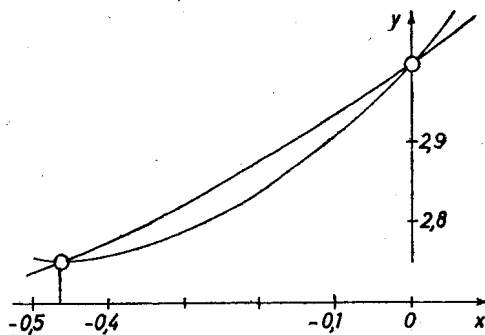
$$\begin{aligned} f(t_2) - f(t_1) &= (t_2^3 - t_1^3) + 2(t_2^2 - t_1^2) + 5(t_2 - t_1) = \\ &= (t_2 - t_1)[t_2^2 + t_2t_1 + t_1^2 + 2(1+t_2) + 2(1+t_1) + 1] > 0, \end{aligned}$$

mert a szögletes zárójelnek mind a 6 tagja pozitív, tehát $f(t)$ az intervallumban szigorúan monoton növekvő.

Az $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$ értékekre támaszkodva és lineáris interpolációt alkalmazva a $t_1 = -0,5$ közelítéssel próbálkozunk: $f(-0,5) = -0,125$, eszerint a gyök nagyobb, mint t_1 . Viszont $t_2 = -0,4$ -et véve $f(-0,4) = 0,256 > 0$, a gyök kisebb, mint t_2 . Ismét lineáris interpolációval a két utóbbi értékre támaszkodva $t_2 = -0,5 + 0,125/0,381 \approx -0,467$ kínálkozik közelítésnek, éspedig jónak bizonyul: $f(-0,467) = 0,00067$, tehát (4) gyökére $t > -0,467$.

Innen (2) alapján $x > 4,284\dots$, ugyanis az $x = (t+1)^2 + 4$ átalakítás szerint $t > -1$ esetén x monoton növekvő függvénye t -nek.

x keresett értéke 10^{-2} értékű jegyének tisztázására tekintsük még az $f(-0,466\dots) = f(-7/15)$ értéket: $2/3375 > 0$, tehát $t < -7/15$, és $t = -7/15$ esetén $x = 3856/900 < 4,285$. Így a kívánt pontossággal $x = 4,28$, ami valóban kielégíti (1)-et, és további gyök nincs.



Megjegyzés. Legyen (3)-ban

$$\sqrt{2t^2 + 4t + 9} = y.$$

Ezt átrendezve a kapcsolatot kielégítő értékpárokat a t, y koordináta-rendszerben az

$$\frac{y^2}{7} - \frac{(t+1)^2}{7/2} = 1$$

egyenletű görbe $y \geq 0$ feltételt kielégítő pontjai ábrázolják. Ez egy $(-1, 0)$ középpontú és az y tengellyel párhuzamos főtengelyű hiperbola felső ága.

(3) jobb oldalának képe pedig az

$$y = t^2 + t + 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

egyenletű parabola. A két görbe az ábra szerint $t = 0$ -nál, továbbá $-1/2$ és 0 között metszi egymást.