

I. Grafikus megoldásban külön-külön előállítjuk az (1), (2) egyenlet képét az x, y derékszögű koordinátarendszerben, majd leolvassuk a két kép közös pontjainak koordinátáit. Az abszolút érték nem negatív, így (1) bal oldalának egyik tagja sem nagyobb 6-nál, (2) bal oldalának tagjai pedig nem nagyobbak 4-nél.

Legyen $x - 1 \geq 0$, azaz $0 \leq x - 1 \leq 6$, $1 \leq x \leq 7$. Aszerint, hogy

$$x + y \geq 0, \quad \text{illetőleg} \quad x + y \leq 0,$$

(1) így alakul:

$$2x + y - 7 = 0, \quad \text{ill.} \quad (x - 1) - (x + y) - 6 = -y - 7 = 0.$$

Az elsőből, x alsó és felső határának behelyettesítésével, $x = 1$ esetén $y = 5$, az $x = 7$ esetben pedig $y = -7$, ennél fogva $x - 1 \geq 0$ mellett (1)-et a derékszögű koordinátarendszer

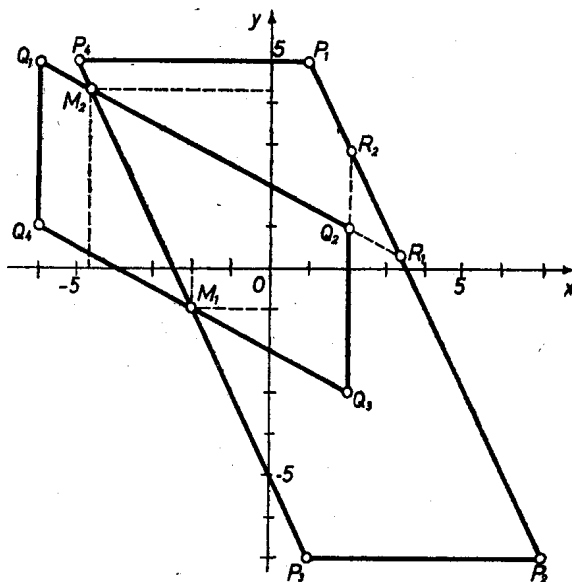
$$P_1(1, 5), \quad P_2(7, -7), \quad P_3(1, -7)$$

pontjai által határolt P_1P_2 és P_2P_3 szakaszának pontjai elégítik ki.

Hasonlóan $x - 1 \leq 0$, éleesebben $-5 \leq x \leq 1$ esetén az

$$x + y \geq 0, \quad \text{illetőleg} \quad x + y \leq 0$$

további feltevés mellett az $y = 5$, ill. $y = -5 - 2x$ egyenletből a P_4P_1 , ill. P_3P_4 szakaszt kapjuk, ahol $P_4(-5; -5)$. Ezek szerint (1) képe a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög (ami nyilvánvalóan paralelogramma) kerülete.



Ugyanígy (2) képe a $Q_1Q_2Q_3Q_4$ paralelogramma kerülete, ahol $Q_1(-6, 5)$, $Q_2(2, 1)$, $Q_3(2, -3)$, $Q_4(-6, 1)$, az oldalak rendre az $x + 2y - 4 = 0$, $x = 2$, $x + 2y + 4 = 0$, $x = -6$ egyenletű egyenes részei. Ennél fogva az egyenletrendszer megoldásait a két paralelogramma kerületének két metszéspontjához tartozó koordináták adják:

$$M_1\text{-ből: } x = -2, \quad y = -1;$$

$$M_2\text{-ből: } x \approx -4.7, \quad y \approx 4.3.$$

II. Számítással úgy kereshetjük a megoldást, hogy az abszolút értékben levő kifejezések minden lehetséges előjelét tekintetbe vesszük és a kapott gyökökre megvizsgáljuk, teljesülnek-e ezek a feltételek. Ez az $x + y < x + y + 1$ egyenlőtlenség figyelembevételével is 12 eset megvizsgálását kívánná. Csökkenthetjük azonban az esetek számát, ha először csak $x - 1$ és $y - 1$ előjelét vesszük figyelembe és minden esetben $x + y = a$ -ra keresünk egyenletet.

a) $x \geq 1, y \geq 1$. Ebben az esetben $x + y \geq 2$, tehát mindegyik abszolútértékjelben pozitív szám áll:

$$2x + y = 7,$$

$$x + 2y = 7.$$

Az egyenletrendszer megoldása az $R_1\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$ pont, nem tesz eleget az $y \geq 1$ feltételnek.

b) $x \geq 1, y < 1$. Az ismert előjelű tagok abszolút értékét képezve az

$$|x + y| = 7 - x,$$

$$|x + y + 1| = 3 + y$$

(3)

egyenletrendszert kapjuk. A másodikból kivonva az első

$$|x + y + 1| - |x + y| = (x + y) - 4.$$

Bevezetve az $a = x + y$ jelölést, az

$$|a + 1| - |a| = a - 4$$

egyenletet kapjuk. A bal oldal értéke -1 és $+1$ között van, tehát a értéke csak a $(3, 5)$ intervallumban lehet, a és $a + 1$ tehát pozitív:

$$(a + 1) - a = a - 4.$$

Így $a = x + y = 5$, ezt (3)-ba helyettesítve az R_2 $(2, 3)$ pontot kapjuk, de ez nem tesz eleget az $y < 1$ feltételnek.

c) $x < 1$, $y \geq 1$. Az ismert abszolút értékű tagok előjelét képezve

$$(4) \quad \begin{aligned} |x + y| &= 5 + x, \\ |x + y + 1| &= 5 - y. \end{aligned}$$

E két egyenlet különbsége az $a = x + y$ jelöléssel az

$$|a| - |a + 1| = a$$

egyenletre vezet: a bal oldal, és így a értéke is -1 és $+1$ között van, tehát $a + 1$ értéke a $(0, 2)$ intervallumban van, így előjele ismert:

$$|a| = 2a + 1.$$

a nem lehet pozitív, mert akkor $a = 2a + 1$, tehát $a < 0$; ezért $3a + 1 = 0$, $a = -1/3$. Ezt (4)-be helyettesítve az

$M_2 \left(-\frac{14}{3}, \frac{13}{3} \right)$ pontot kapjuk, mely eleget tesz feltevéseinknek, tehát megoldás.

d) $x < 1$, $y < 1$, a fentiekhez hasonlóan

$$(5) \quad \begin{aligned} |x + y| &= 5 + x \\ |x + y + 1| &= 3 + y. \end{aligned}$$

E két egyenlet összege az

$$|a| + |a + 1| = a + 8$$

egyenletre vezet, és mivel $x + y < 2$, $a < 2$. Ha $-1 \leq a \leq 2$, akkor a bal oldal legfeljebb 5, a jobb oldal legalább 7, így csak $a < -1$ lehet: $-2a - 1 = a + 8$, tehát $a = -3$, és (5) alapján kapjuk a feltételeknek eleget tevő $M_1(-2, -1)$ pontot.