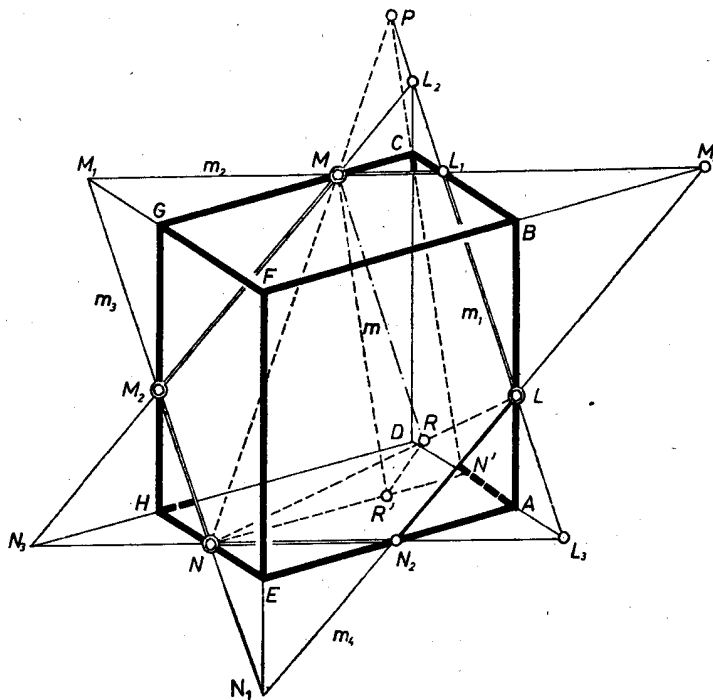


**I megoldás.** I. Legyen a  $K$  kocka egy lapja  $ABCD$ , rá merőleges élei rendre  $AE, BF, CG, DH$ ; párhuzamos vetületben mind a 6 lap képe paralelogramma, mert párhuzamos egyenesek vetületei is párhuzamosak. Legyenek az adott pontok az  $AB, CG, EH$  páronként kitérő élek vetületén rendre  $L, M, N$ ; nem okoz félreértést, ha rendre ugyanígy jelöljük a térben az élek megfelelő pontjait is; legyen végül az utóbbiak által meghatározott sík  $S$ .



1. ábra

a) Amennyiben  $L, M, N$  egyike sem csúcsa  $K$ -nak,  $S$  a  $K$ -nak mind a 6 lapját átmetszi, a  $Q$  metszetidom hatszög, és ennek minden második csúcsa adott pont, mert a metszetnek pl. az  $ABCD$  és az  $ABFE$  lapban az  $L$ -ből kiinduló oldala nem végződhet sem  $M$ -ben, sem  $N$ -ben, hiszen a mondott lapok egyik éle sem kitérő  $AB$ -hez képest.

Alább megadandó szerkesztésünk minden egyes lépése egy egyenes szerkesztése lesz  $K$  valamelyik lapsíkján, ill. egy megadandó segédsíkon, vagyis a térben. A lépéseket rajzunk síkján követjük az illető egyenesek vetületének megrajzolásával. Csak azt fogjuk felhasználni, hogy párhuzamos egyeneseknek párhuzamos vetítéssel nyert képei párhuzamosak. (Nem foglalkozunk olyan esetekkel, amikor  $K$  bizonyos csúcsainak vetületei egybeesnek.)

Elég meghatározni  $S$  és az  $ABCD = S_1$  lapsík  $m_1$  metszészvonalát. Ugyanis  $m_1$ -nek a  $BC$  fedőél egyenesén levő  $L_1$  pontját  $M$ -mel összekötve megvan  $S$ -nek a  $BCGF$  fedőlap-síkkal való  $m_2$  metszészvonala,  $m_2$ -nek  $FG$ -n levő  $M_1$  pontját  $N$ -nel összekötve megvan az  $EFGH$  oldallap síkjával való  $m_3$  metszészvonal, végül  $m_3$ -nak  $EF$ -en levő  $N_1$  pontját  $L$ -lél összekötve megvan  $S$ -nek az  $ABFE$  lapsíkkal való  $m_4$  metszészvonala. Látni fogjuk, hogy e négy metszészvonalon megkapjuk  $Q$  hátralevő 3 csúcsát.

Mármost  $m_1$ -et megadja az  $MN$  egyenes  $S_1$ -en levő  $P$  dőféspontjának  $L$ -lél való összekötése.  $P$ -t megkapjuk egy az  $MN$ -et tartalmazó, ügyesen választott  $S_2$  segédsík felhasználásával.  $MN$  benne van a  $CGN$  síkban, amely az ( $N$ -et tartalmazó)  $ADHE$  lapsíkot egy a  $CG$ -vel párhuzamos egyenesben metszi. Így e metszészvonal  $DH$ -val is párhuzamos, és átmegy  $N$ -en, megszerkeszthető, legyen  $AD$ -n levő pontja  $N'$ . Ekkor pedig  $S_2$  és  $S_1$  metszészvonala  $N'C$ , ennek  $NM$ -mel való metszéspontja  $P$ , és az előrebocsátottak szerint  $m_1 = LP$ . Az  $N'C$  egyenes lényegében  $NM$ -nek  $S_1$ -en levő vetülete, ha a vetítés iránya párhuzamos  $GC$ -vel.

Csak azt használtuk fel, hogy két sík egyenesben metszi egymást, valamint hogy egy síkot egy vele nem párhuzamos és nem benne fekvő egyenes egy pontban metsz, ezért eljárásunk helyességének bizonyítására csak azt kell megmutatnunk, hogy  $L, M, N$  helyzetére kimondott föltevéseink miatt – ti. hogy mindegyikük a kiszemelt élnek belső pontja – szerkesztésünk minden lépése egyértelműen meghatározott.  $N'$  az  $AD$  él belső pontja, különbözik  $C$ -től, így az  $N'C$  egyenes határozott,  $P$  ennek  $C$ -től különböző pontja, éspedig az  $N'C$  szakasz  $C$ -n túli meghosszabbításán, mert  $NN' > MC > 0$ . Emiatt  $L_1$  a  $BC$  szakasz  $C$ -től különböző pontja, egyszersmind csúcsa  $Q$ -nak,  $M_1$  az  $FG$  élnek  $G$ -n túli,  $N_1$  pedig az  $FE$  élnek  $E$ -n túli meghosszabbításán van. Így  $GH$  elválasztja  $M_1$ -et  $N$ -től,  $AE$  elválasztja  $N_1$ -et  $L$ -től, tehát  $m_3$  és  $m_4$  a mondott elválasztó élen egy-egy további  $M_2$ , ill.  $N_2$  csúcsát metszi ki  $Q$ -nak.

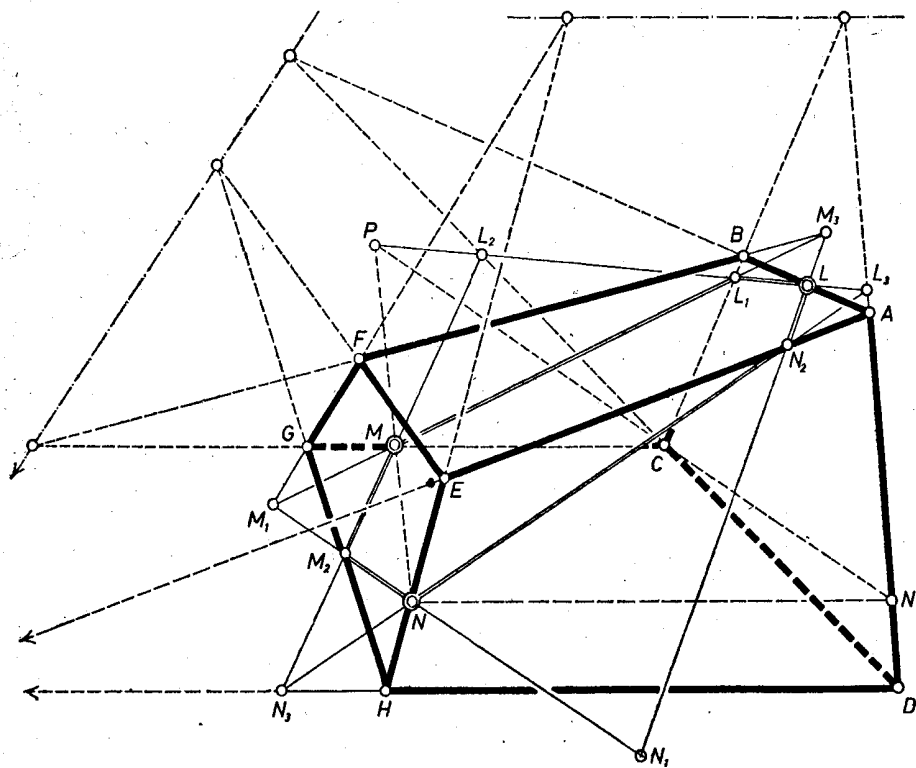
b) Ha adott pontjaink közül egy a megfelelő él valamelyik végpontja, akkor válasszuk a betűzést úgy, hogy ez  $N$  legyen. Meggondolásunk mind  $N = E$ , mind  $N = H$  esetén érvényes, az első esetben  $N_2$ , a másodikban  $M_2$  azonos  $N$ -nel, a síkmetszet ötszög.

Ha két adott pont esik él végpontjába, vagy mind a három, feladatunk elveszti eredeti jellegét. Két pont esetén  $2^2 = 4$ -féleképpen, három esetén  $8$ -féleképpen választhatjuk ki  $L, M, N$  céljára  $K$ -nak 2, ill. 3 csúcsát. Ekkor mindig

már eleve adott  $Q$ -nak egy vagy több oldalszakasza, és célszerűbb azt felhasználni, hogy  $S$  a  $K$ -nak párhuzamos lapsíkjaait párhuzamos egyenesekben metszi.

II. Az  $L, M, N$  pontokat tartalmazó 3 él megfelelő kiválasztására lényegében nincs más lehetőség. Az elsőként szabadon választható  $AB$ -hez képest csak a  $CG, DH$  és az  $FG, EH$  élpárok kitérők, az első párból a szimmetria miatt elég  $CG$ -t vennünk, ehhez képest a másik párból csak  $EH$  kitérő.

A kocka speciális tulajdonságai közül csak azt használtuk fel, hogy a  $CG$  és  $DH$  élek párhuzamosak (ebből ugyanis már következik, hogy az  $ADHE$  lapsík is párhuzamos  $CG$ -vel). Emiatt szerkesztésünk minden olyan hatlapú testre érvényes, melynek ez a tulajdonsága megvan (lásd 2. ábra).



2. ábra

Paralelepipedonra szorítkozva a  $Q$  metszethatszög szemben fekvő oldalai párhuzamosoknak kell hogy adódjanak, de ezt nem használtuk fel. Egyébként egy párhuzamos vetítéssel nyert vetületből – amennyiben a lapok vetületei paralelogrammák – nem is állapítható meg, hogy valóban kocka képével állunk-e szemben, még akkor sem, ha tudjuk, hogy a rajz síkja merőleges a vetítés irányára.

Fiala Tibor (Budapest, Rákóczi F. gimn. III. o. t.)  
dolgozata alapján, kiegészítésekkel

*Megjegyzés.* Az. 1. ábrán – térbeli eredetétől eltekintve – a következőket látjuk: ha  $ABCD, ABFE, BCGF$  és  $CDHG$  (a csúcsok mondott körüljárása szerint) paralelogrammák,  $L, M, N$  rendre az  $AB, CG, EH$  szakasz egy közbülső pontja, továbbá  $AENN'$  ugyancsak paralelogramma,  $NM$  és  $N'C$  metszéspontja  $P$ ,  $LP$  metszéspontja a  $BC, DC, DA$  egyenessel rendre  $L_1, L_2, L_3$ ,  $ML_1$  metszéspontja  $FG$ -vel és  $FB$ -vel  $M_1$ , ill.  $M_3$  –, mindezen feltételekből következik, hogy  $NM_1$  párhuzamos  $LP$ -vel,  $NM_1$ -nek  $GH$ -val és  $EF$ -fel való metszéspontját  $M_2$ -vel, ill.  $N_1$ -gyel jelölve  $MM_2$  párhuzamos  $N_1M_3$ -mal, és az utóbbi egyenes átmegy  $L$ -en,  $MM_2$  pedig  $L_2$ -n, továbbá  $NL_3$  párhuzamos  $L_1M$ -mel és átmegy az  $AE, N_1M_3$ , valamint a  $DH, MM_2$  egyenespár  $N_2$ , ill.  $N_3$  metszéspontján. Mindezen következményeknek a föltevésből való bizonyítása – tisztán síkbeli úton – hosszú és nehézkes lenne.

**II. megoldás** (vázlat). A fenti jelöléseket használva tekintsük azt az  $m$  egyenest, amiben  $S$  az  $M$ -en átmenő és az  $ABCD, EFGH$  lapsíkokkal párhuzamos síkot metszi. Ez nyilvánvalóan párhuzamos  $m_1$ -gyel és  $m_3$ -mal, tehát  $m$ -et ismerve a metszet  $NM_2$  és  $LL_1$  oldala megszerkeszthető.  $m$ -nek az  $LN$  egyenesen levő  $R$  metszéspontja az  $NR : NL = GM : GC = NR' : NN'$  aránypárból szerkeszthető. Végül  $LN_2 \parallel MM_2$ .

Horváth Sándor (Budapest, I. István gimn. IV. o. t.)