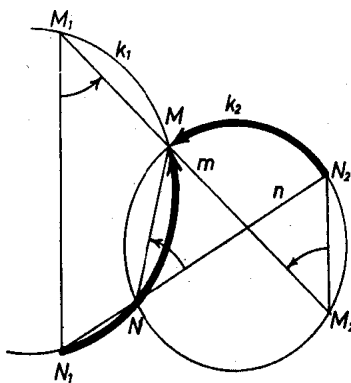


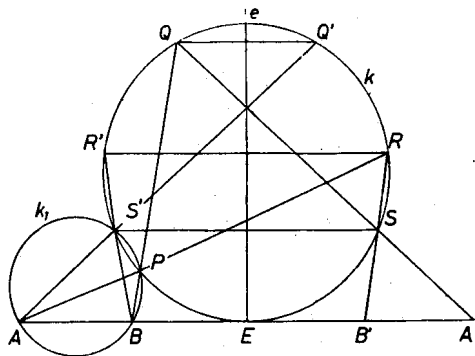
I. megoldás. Bizonyításunk elvégzéséhez szükségünk lesz a következő egyszerű tényre: ha a k_1 és k_2 körök egymást az M , N pontokban metszik, és ezeken tetszőleges m , ill., n egyeneseket fektetünk át, amelyek a köröket másodszor rendre az M_1 , M_2 , ill., N_1 , N_2 pontokban metszik, akkor $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ (1. ábra)¹.



1. ábra

Valóban, az $N_1M_1M \angle = N_2NM \angle = N_2M_2M \angle$, tehát az N_1M_1 , N_2M_2 egyeneseket azonos forgatás viszi át az M_1M_2 egyenesbe, így párhuzamosak.

Rátérünk a bizonyításra. Tükrözzük Q -t a feladatban szereplő k körnek az E ponton átmenő e átmérőjére, a kapott pontot jelöljük Q' -vel (2. ábra).



2. ábra

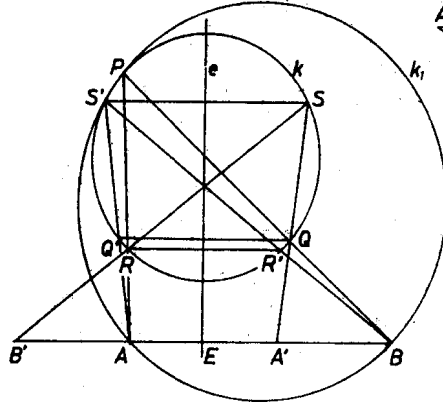
Messe az AQ' egyenes k -t az S' pontban: ez nyilván az S pont e -re vonatkozó tükörképe. Megmutatjuk, hogy az A , B , P , S' pontok egy k_1 körön helyezkednek el. Ha S' és P azonosak, ez nyilvánvaló. Ha különbözők, legyen k_1 a B , P , S' pontokon átmenő kör, és messe k_1 -et a $Q'S'$ egyenes A^* -ban. Fenti megjegyzésünk alapján $QQ' \parallel BA^*$, és mivel $QQ' \parallel EB$, így A^* a BE egyenesen is rajta van, tehát azonos a BE és $Q'S'$ egyenesek metszéspontjával, A -val. A tehát rajta van k_1 -en. Messe a BS' egyenes k -t másodszor R' -ben. Ugyancsak a fenti megjegyzés alapján $AB \parallel R'R$, tehát R' az R pont e -re vonatkozó tükörképe. Emiatt az $R'S'$ egyenes e -re vonatkozó tükörképe az RS egyenes, és ez az e -re szimmetrikus AE egyenesből valóban a B pont E -re szimmetrikus B' párját metszi ki, amit bizonyítanunk kellett.

(Tusnádý Gábor)

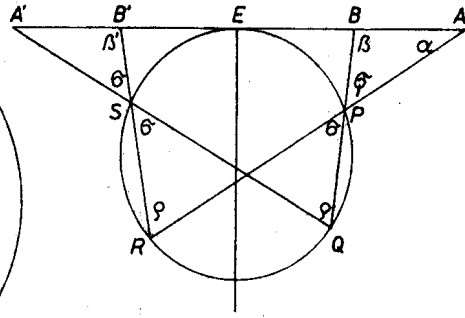
Megjegyzések. 1. Bizonyításunk független attól, hogy Q és R' közül melyik van közelebb az AA' egyeneshez. Nem használtuk ki sem az $EB < EA$, $BP < BQ$ nagyságviszonyokat, sem azt, hogy B ugyanazon oldalon van E -nek, mint A , tehát a szerkesztés e korlátozások nélkül érvényes. Ajánljuk az olvasóknak ezek átgondolását.

2. Hasonlóan szerkeszthető (és a szerkesztés helyessége hasonlóan bizonyítható) a k kör e átmérőjének tetszőleges E pontjában emelt merőleges egyenes tetszőleges B pontjának E -re vonatkozó B' tükörképe, ha adott az egyenesen az E -re szimmetrikus A , A' pontpár (3. ábra). Ha a szerkesztés vagy a bizonyítás során két pont azonosnak adódik a k körön, az általuk meghatározott egyenesnek a k kör e közös ponthoz tartozó érintőjét tekintjük. Ilyen esetben a bevezetőben megoldott segédfeladatban is meg kell engednünk, hogy az m , n egyenesek a k_1 , k_2 körök érintői legyenek. (T. G.)

¹Lásd: Czapáry Endre-Horvay Katalin-Reiman István-dr. Soós Paula: Geometriai feladatok gyűjteménye, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964, 872. feladat, 55. o.



3. ábra



4. ábra

Sokan számítással bizonyították az állítást. Ilyen a következő

II. megoldás. Használjuk a 4. ábra szögjelöléseit. Az egyenlően jelölt szögek nyilvánvalóan egyenlők. A $B'A'S$ háromszögből a szinusz tétel alapján

$$(1) \quad A'B' = A'S \cdot \frac{\sin \sigma}{\sin \beta'} = A'S \cdot \frac{\sin \angle APB}{\sin \angle AB'R}.$$

Alkalmazzuk a körhöz húzott szelő és érintő tételét az A' , majd az A pontra, továbbá a szinusz tételt az ABP és $AB'R$ háromszögnek (1)-ben szereplő alkotórészeire:

$$\begin{aligned} A'S &= \frac{A'E^2}{A'Q} = \frac{AE^2}{A'Q} = \frac{AP \cdot AR}{A'Q}, \\ \sin \angle APB &= \frac{AB \sin \angle ABP}{AP} = \frac{AB \sin \angle A'BQ}{AP}, \\ \frac{1}{\sin \angle AB'R} &= \frac{B'A}{AR \sin \angle ARB'} = \frac{B'A}{AR \sin \angle A'QB}. \end{aligned}$$

Ezeket összeszorozva

$$A'B' = \frac{AB \cdot B'A}{\frac{A'Q \sin \angle A'QB}{\sin \angle A'BQ}},$$

és felismerjük, hogy a nevezőben az $A'QB$ háromszög BA' oldala áll. Átrendezéssel, majd mindkét oldalhoz 1-et adva

$$\frac{A'B'}{B'A} = \frac{AB}{BA'}, \quad \frac{A'A}{B'A} = \frac{AA'}{BA'},$$

eszerint $B'A = BA'$, és ez az állítást igazolja.

Michaletzky György (Budapest, Piarista Gimn., III. o. t.)