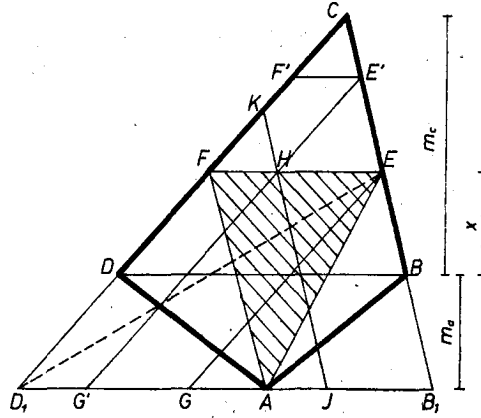


I. megoldás. Legyen az A és C csúcs, továbbá az eltolódó EF egyenes távolsága a BD átló egyenesétől rendre m_a, m_c, x . CEF és CBD hasonló háromszögek, ebből



$$EF = BD \cdot \frac{m_c - x}{m_c},$$

így az AEF háromszög területe, mint x függvénye:

$$y = \frac{BD}{2m_c}(m_c - x)(m_a + x) = -\frac{BD}{2m_c}(x + m_a)(x - m_c),$$

ahol $0 \leq x \leq m_c$.

Ez másodfokú függvény. Jól tudjuk, hogy minden (valódi) másodfokú függvénynek van szélső értéke, és annak helyét megadja a függvény két 0-helyének számtani közepe, ill. bármely olyan x', x'' helyek számtani közepe, amely helyeken a függvény egyenlő értéket vesz fel. Esetünkben a 0-helyek $x = -m_a$ és $x = m_c$, tehát a szélső érték helye

$$x_0 = \frac{m_c - m_a}{2},$$

amennyiben ez a hely beletartozik az értelmezési tartományba:

$$0 \leq x_0 \leq m_c, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq \frac{m_c - m_a}{2} = m_c, \quad \text{vagyis ha} \quad m_a \leq m_c.$$

Ez akkor teljesül, ha C távolabb van a BD átlótól, vagy legalább ugyanannyira van tőle, mint az A csúcs.

Azt is tudjuk, hogy a másodfokú függvénynek maximuma, ill. minimuma van aszerint, hogy egy a mondott x', x'' helyek közti helyen nagyobb, ill. kisebb értéket vesz fel, mint a két helyen felvett közös érték. Mármost $-m_a < 0 < m_c$, és az $x = 0$ helyen függvényünk értéke

$$y = \frac{BD \cdot m_a}{2} > 0,$$

tehát x_0 -ban maximum van, ha $m_a \leq m_c$.

Ha $x_0 < 0$, azaz $m_a > m_c$, akkor hasonló megfontolás szerint a $0 \leq x \leq m_c$ intervallumban a függvény monoton csökken, legnagyobb értékét az intervallum bal végpontjában, $x = 0$ -ban veszi fel, ekkor az eltolódás folyamán az AEF háromszög a kiinduló ABD helyzetben vesz fel legnagyobb területet. – Más vizsgálandó eset nincs, mert $x_0 > m_c$ lehetetlen.

Sax Gyula (Budapest, Kölcsey F. G., III. o. t.)

II. megoldás. Messe az A -n át BD -vel párhuzamosan húzott egyenes CB és CD meghosszabbítását a B_1 , ill. D_1 pontban. Ekkor az AEF háromszög területe egyenlő a D_1EF háromszögével és fele akkora, mint a $D_1GEF = P$ paralelogrammáé, – G -vel jelölve az E -n át CD_1 -gyel párhuzamosan húzott egyenes metszéspontját B_1D_1 -gyel. Elég tehát a BD -vel párhuzamos egyenesek különböző helyzeteihez tartozó ilyen paralelogrammák közül keresni ki a legnagyobb területűt.

Az egyenes egy C -hez közelebbi helyzetéhez tartozó, megfelelő paralelogramma legyen $D_1G'E'F' = P'$, EF és $E'G'$ metszéspontja pedig H . Ekkor P' -ből az $E'F'FH$ paralelogramma nyúlik túl P -n, viszont az utóbbiból $EHG'G'$ -t nem fed le P' . Hasonlítsuk össze e két paralelogramma területét. Toljuk el $G'G$ -t D_1B_1 -en a JB_1 helyzetbe, FF' -t pedig D_1C -n a KC helyzetbe. Ismét paralelogrammákat kapunk, tehát H, J, K egy a B_1C -vel párhuzamos egyenesen van. P' területe $CKHE'$ területével nagyobb, viszont B_1EHJ területével kisebb, mint P területe. Az említett két paralelogrammának a B_1C egyenesre merőleges magassága egyenlő, így az első aszerint kisebb területű a másodikonál, egyenlő vele, vagy nagyobb nála, amint CE' kisebb B_1E -nél, egyenlő vele, vagy nagyobb nála, ez pedig attól függ,

hogy $E'F'$ messzebb van-e C -től, mint EF az A -tól, vagy ugyanakkora távolságra vannak, vagy EF van közelebb A -hoz mint $E'F'$ a C -hez. Ugyanezt mondhatjuk tehát a P' , P paralelogrammák és az $AE'F'$, AEF háromszögek területéről is.

Eszerint a C csúcsból indítva a BD -vel párhuzamos egyenest, az AEF háromszög területe nő, míg el nem éri az egyenes BD -t, ha ez C -től legfeljebb akkora távolságra van, mint A -tól; ha viszont A -hoz van közelebb, akkor addig növekszik a háromszög területe, míg az egyenes egyenlő távolságra nem lesz C -től és A -tól; tovább közeledve A -hoz a terület csökken. A legnagyobb területet tehát a BD átló szolgáltatja, ha ez C -től legfeljebb akkora távolságra van, mint A -tól, viszont a két mondott csúctól egyenlő távolságra levő egyenes, ha BD közelebb van A -hoz, mint C -hez.