

$K$  tagjainak száma  $n + 1$ , közülük 4-4 tag együtthatója egyenlő:  $1, 2, \dots$ , így középen 1-gyel több egyenlő együtthatójú tag van, mint amennyi az  $n$ -nek 4-gyel való osztásában fellépő maradék. Legyen  $n = 4p + q$ , ahol  $0 \leq q < 4$ , akkor a középső tagok száma  $q + 1$ , azaz  $1, 2, 3$  vagy  $4$ , és együtthatójuk  $p + 1$ .

$K$  felbontható  $p + 1$  számú olyan mértani sorozat összegére, amelyek mindegyikében a hányados  $x$ , a (jobbról számított) első tag rendre  $1, x^2, x^4, \dots, x^{2p}$ , a tagok száma 4-esével csökken, vagyis rendre  $n + 1, n - 3, n - 7, \dots, q + 5$ , végül az utolsóban  $n + 1 - 4p = q + 1$ , majd minden egyes sorozat összegét zárt alakban írjuk (feltéve, hogy  $x \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} K &= (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1) + \\ &\quad + (x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + x^4 + x^3 + x^2) + \dots + \\ &\quad + (x^{n-2p} + \dots + x^{2p}) = \\ &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^2 \cdot \frac{x^{n-3} - 1}{x - 1} + \dots + x^{2p} \cdot \frac{x^{n-4p+1} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Beszorzással és külön gyűjtve a számlálók első tagjait

$$(x - 1) \cdot K = (x^{n+1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-2p+1}) - (1 + x^2 + \dots + x^{2p}).$$

Az első összegből az utolsó tagot kiemelve a zárójelben a második zárójel tagjai maradnak, fordított sorrendben, és  $x^2$  hányadosú mértani sorozatot alkotnak, ezért

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot K &= (x^{n-2p+1} - 1)(1 + x^2 + \dots + x^{2p}) = \\ &= \frac{(x^{n-2p+1} - 1)(x^{2p+2} - 1)}{x^2 - 1}, \end{aligned}$$

amennyiben  $x^2 \neq 1$ . Ennélfogva  $2p = (n - q)/2$  figyelembevételével

$$K = \frac{(x^{\frac{n-q}{2}+2} - 1)(x^{\frac{n+q}{2}+1} - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1)}.$$

A kizárt  $x = 1$  esetben  $K$  négy azonos számtani sorozatra bontható, egyenként  $p$  számú taggal, középen pedig még  $q + 1$  tag áll, mindegyikük  $p + 1$ , így

$$\begin{aligned} K &= 4(1 + 2 + \dots + p) + (q + 1)(p + 1) = (p + 1)(2p + q + 1) = \\ &= \frac{1}{8}(n - q + 4)(n + q + 2). \end{aligned}$$

$x = -1$  esetén  $K$  tagjai váltakozó előjelűek, így az ugyanazon együtthatójú 4-4 tag összege 0, csak a  $p + 1$  abszolút értékű tagokat kell néznünk. Páratlan  $n$  esetén vagy nincs ilyen, vagy kettő van, és mivel szomszédok, mindenképpen  $K = 0$ . Páros  $n$ , azaz  $q = 0$  és  $2$  esetén pedig  $K = p + 1 = (n - q + 4)/4$ , mert a pozitív tagok vannak többségben, hiszen jobbról haladva. közép felé az 1-gyel nagyobb együtthatójú tagok közül az elsőben páros a kitevő.

Lempert László (Budapest, Radnóti M. gyak. gimn. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Eredményünk  $x = 0$  esetén is érvényes, amint a mértani sorozat összegképlete is érvényes  $q = 0$  esetén is.