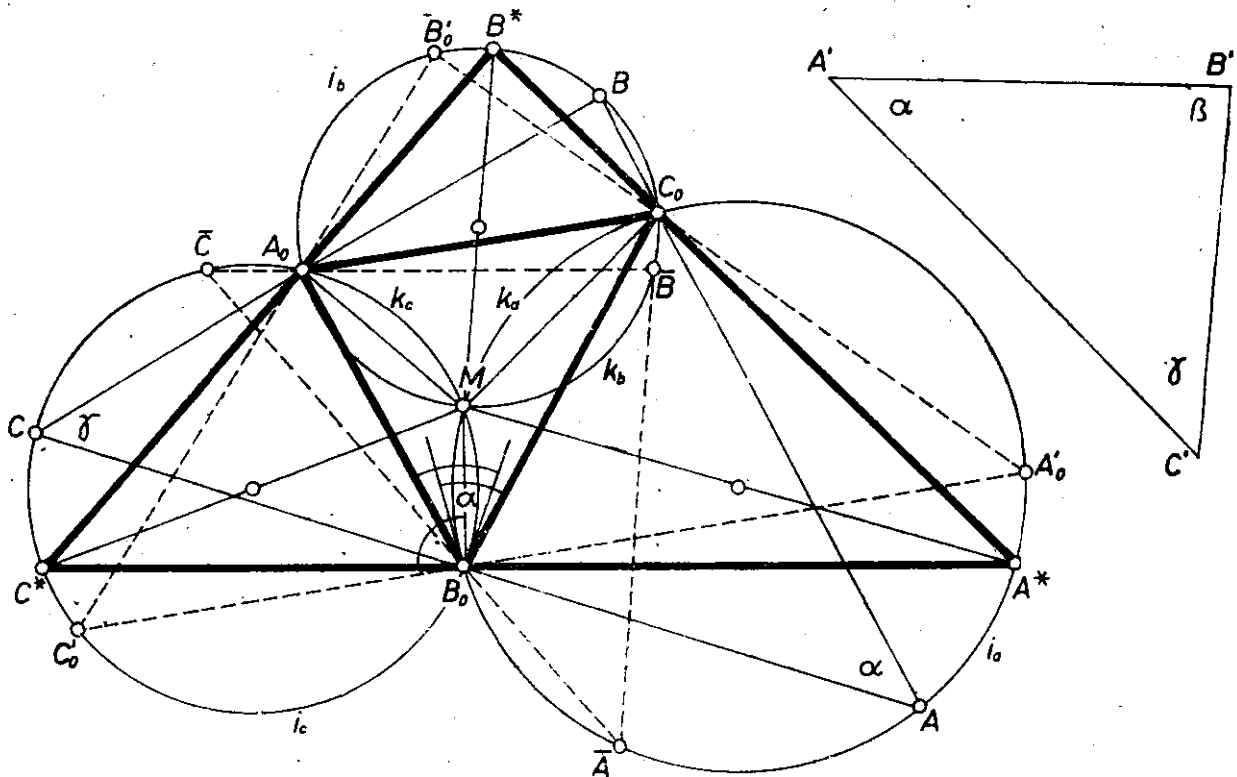


I. Egy az előírásoknak megfelelő ABC háromszöget a következő lépésekben keresünk. 1. Az $A_0B_0C_0 = H_0$ háromszög A_0B_0 és B_0C_0 oldala fölé, kifelé megszerkesztjük az $A'C'B' \sphericalangle = \gamma$, ill. $B'A'C' \sphericalangle = \alpha$ nyílású i_c , ill. i_a látószög körívet – ezen kell lennie a C , ill. A csúcsnak; 2. B_0 -on át olyan egyenest veszünk fel, mely mindkét ívet metszi egy-egy belső pontjukban – és így természetesen kívül halad H_0 -on –, legyen a metszéspont C , ill. A ; 3. megkeressük a CA_0 és AC_0 egyenesek B metszéspontját.

Az így szerkesztett $ABC = H$ háromszögben C -nél γ , A -nál α nagyságú szög van, tehát $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$, csúcsaik a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak, és az AB , BC , CA egyenesek rendre átmennek a C_0 , A_0 , B_0 ponton.

Megjegyezzük, hogy a mondott B pont mindig azon a k_b körön adódik, amelynek A_0C_0 húrja, és B_0 -lal ellentétes oldalon levő i_b ívének pontjaiból a húr $A'B'C' \sphericalangle = \beta$ szögben látszik. Ha ugyanis az adódó H tartalmazza H_0 -t, akkor B az A_0C_0 egyenes B_0 -t nem tartalmazó partján van, és belőle az A_0C_0 szakasz β szögben látszik; ha pedig H nem tartalmazza H_0 -t, mert B az A_0C_0 egyenesnek B_0 -t tartalmazó partján adódott – lásd az ábra $\overline{ABC}$ háromszögét, C_0 nincs rajta az $\overline{AB}$ szakaszon, $\overline{BC}$ átmetszi H_0 -t, akkor B -ből az A_0C_0 szakasz $180^\circ - \beta$ szögben látszik, és ezért van rajta k_b -n.

Az $\overline{ABC}$ háromszögben látott példára tekintettel megmutatjuk, hogy mindig felvehető B_0 -n át olyan egyenes, hogy a belőle szerkesztett ABC háromszög valódi körülírt háromszöge az $A_0B_0C_0$ háromszögnek. Ilyen a B_0 -on átmenő, A_0C_0 -lal párhuzamos egyenes. Ekkor ugyanis az A_0C , C_0A félegyenesek az A_0C_0 egyenes B_0 -t tartalmazó oldalán vannak, az A_0C_0 szakasszal bezárt szögük rendre $180^\circ - \gamma$, $180^\circ - \alpha$, ezek összege $180^\circ + \beta > 180^\circ$, ezért a két félegyenes nem metszi egymást, csak visszafelé való meghosszabbításaik, tehát B az A_0C_0 egyenes B_0 -t nem tartalmazó oldalán adódik, és H a belsejében tartalmazza H_0 -t.



II. Azt is kaptuk, hogy tetszés szerinti számú, a követelményeknek megfelelő H háromszög szerkeszthető. Ezek egymáshoz is hasonlóak, tehát közülük az a legnagyobb területű, amelyikben pl. a CA oldal hossza a legnagyobb.

Tekintsük az i_a és i_c íveket tartalmazó k_a , k_c körök B_0 -tól különböző M metszéspontját. Ez mindkét ívnek a kiegészítő ívéen, az $A_0B_0C_0$ szögtartományban van, mert a körök B_0 -beli érintői a B_0C_0 , B_0A_0 egyenessel rendre α , γ szöget zárnak be és e két szög átfedi egymást, mert a feltevés alapján

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma > 90^\circ > \beta_0 = A_0B_0C_0 \sphericalangle$$

Ennélfogva C -nek i_c -n való mozgása közben az MCB_0 szög állandó, és ugyanez áll az MAB_0 szögre. Így pedig, H -t változtatva, az M -ben közös csúccsal bíró MAC háromszögek is hasonlóak, és CA akkor a legnagyobb, ha MC a legnagyobb, vagyis ha C a k_c -nek M -mel átellenes C^* pontjában van.

Ezzel eljárást kaptunk a keresett legnagyobb területű $A^*B^*C^* = H^*$ háromszög megszerkesztésére: a C^*B_0 egyenes k_a -ból kimetszi A^* -ot, és a C^*A_0 , A^*C_0 egyenespár metszéspontja B^* .

H^* megfelel az előbbi előírásoknak is, mert az MB_0C^* szög derékszög, tehát az MB_0A^* szög is 90° . Így C^* az i_c -n, A^* az i_a -n van, hiszen γ és α hegyesszögek, az ívek nagyobbak félkörnél. Hasonlóan a B^*C^* , B^*A^* oldalszakasz tartalmazza A_0 -t, ill. C_0 -t. Ennek bizonyításához felhasználjuk, hogy – mint láttuk – B a k_b -n van, továbbá hogy k_b is átmegy M -en. Valóban, mint láttuk,

$$A_0MB_0\angle = 180^\circ - \gamma > 90^\circ, \quad B_0MC_0\angle = 180^\circ - \alpha > 90^\circ,$$

ezért összegük 180° és 360° közé esik, M benne van H_0 -ban, és $C_0MA_0\angle = 180^\circ - \beta$, tehát M az i_b -t kiegészítő ív pontja. Ekkor pedig $A^*C_0M\angle = 90^\circ$ miatt $MC_0B^*\angle = 90^\circ$, tehát B^* a k_b -nek M -mel átellenes pontja.

Megjegyzés. H_0 hegyesszögű voltának felhasználása nélkül is belátható, hogy mindig húzható B_0 -on át olyan AC egyenes, hogy a belőle kapott H háromszög valódi körülírt háromszöge H_0 -nak.

Válasszunk egy alapírányt, járjuk körül H_0 -t és H -t, és írjuk fel mindegyik oldaluknak mint félegyenesnek az irányszögét, vagyis azt, mekkora elfordulás viszi át az alapírányt az illető félegyenesbe, majd ezekből annak feltételeit, hogy H -nak mindhárom oldalegyenese H_0 -on kívül haladjon.

Feltehetjük, hogy H_0 körüljárása pozitív, hiszen ezt – ha kell – két csúcs betűzésének fölcserélésével elérhetjük. Így H körüljárása is pozitív lesz, és az irányszög minden egyes csúcson áthaladva, az illető csúcsnál levő külső szöggel nő.

Legyen az alapírány az A_0B_0 félegyenes iránya, legyenek továbbá H_0 egymás utáni szögei $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ végül a CA félegyenes irányszöge φ . Így az irányszögek:

$$\begin{aligned} A_0B_0 &: 0^\circ \text{ (ill. egyszeri körüljárás után } 360^\circ), \\ B_0C_0 &: 180^\circ - \beta_0, \\ C_0A_0 &: (180^\circ - \beta_0) + (180^\circ - \gamma_0) = 180^\circ + \alpha_0, \\ CA &: \varphi, \\ AB &: \varphi + 180^\circ - \alpha, \\ BC &: (\varphi + 180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = \varphi + 180^\circ + \gamma. \end{aligned}$$

A CA félegyenes H_0 -on kívül halad, ha irányszöge A_0B_0 és B_0C_0 irányszöge közé esik:

$$(1) \quad 0^\circ < \varphi < 180^\circ - \beta_0;$$

Hasonlóan az AB, BC félegyenesből

$$180^\circ - \beta_0 < \varphi + 180^\circ - \alpha < 180^\circ + \alpha_0, \quad 180^\circ + \alpha_0 < \varphi + 180^\circ + \gamma < 360^\circ,$$

azaz φ -re megoldva

$$(2) \quad \alpha - \beta_0 < \varphi < \alpha + \alpha_0,$$

$$(3) \quad \alpha_0 - \gamma < \varphi < 180^\circ - \gamma.$$

Mármint φ -nek bármelyik kapott felső korlátjából bármelyik másik kettős egyenlőtlenségbeli alsó korlátját kivonva pozitív különbséget kapunk, ugyanis a 6 különbség így alakítható:

$$180^\circ - \alpha, \quad 180^\circ - \beta, \quad 180^\circ - \gamma; \quad \alpha_0 + \alpha, \quad \beta_0 + \beta, \quad \gamma_0 + \gamma,$$

ennélfogva a felső korlátok legkisebbike nagyobb az alsó korlátok legnagyobbikánál. Így pedig van az (1)–(3)-nak eleget tevő φ irányszög; ezt akartuk belátni. Tetszés szerinti H_0, H háromszög-pár esetén adódhat az $\alpha_0 > 180^\circ - \gamma$ nagyságviszony; ekkor a hegyesszögek esetére fönt ajánlott $\varphi = \alpha_0$ irányszögű egyenes nem felelne meg.