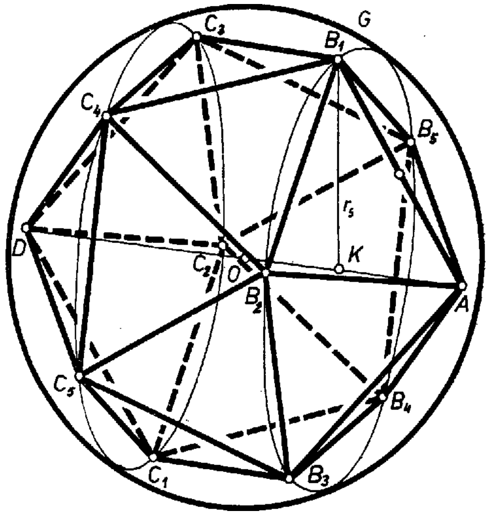
a) Az 1472. feladatban vizsgált I szabályos ikoszaédernek 20 szabályos háromszöglapja van, egységnyi oldalakkal, a szerkesztésben felhasznált $B_1B_2B_3B_4B_5$ és $C_1C_2C_3C_4C_5$ ötszögek mindegyik oldalában $2-2$ háromszög fut össze (A és a C csúcsok felé, ill. D és a B csúcsok felé), és ezzel minden lapot egyszer vettünk számba.



Térfogatának kiszámításához szétvágjuk a testet mindazon háromszögek mentén, melyeknek egyik oldala a testnek egy éle, ezzel szemben fekvő csúcsa pedig a test köré írt G gömbnek O középpontja. Így I szétesik 20 háromoldalú gúlára. E gúlák egybevágók, hiszen ez áll alapháromszögeikre, másrészt oldallapjaikra is, amelyek egyenlő szárú háromszögek, száruk G-nek r sugarával egyenlő. A gúlák magassága annyi, mint I bármelyik lapjának O-tól való d távolsága. Ezt abból számíthatjuk, hogy az I lapjai köré írt körök egyszersmind G-nek síkmetszetei, és sugaruk az egységnyi oldalú szabályos háromszög magasságának 2/3 része: $r_3=(\sqrt{3}/2)\cdot(2/3)=1/\sqrt{3}$, másrészt hogy az idézett feladat szerint

$$r=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\quad \text{tehát}\quad d^2=r^2-r_3^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{3}=\frac{14+6\sqrt{5}}{48}=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^2,$$

ennélfogva az ikoszaéder térfogata

$$V=20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}\qquad(\approx 2,18)$$

térfogategység (a térfogategységnyi kocka éle egyenlő I élével).

b) Az 1440. feladathoz fűzött megjegyzés szerint a tv-labda előállítható a szabályos ikoszaéderből úgy, hogy ennek mindegyik élét 3 egyenlő részre osztjuk, mindegyik csúcsból kiinduló 5 él közelebbi harmadoló pontjain át síkot fektetünk, és eltávolítjuk a testről azt a szabályos ötoldalú gúlát, amely így a síknak O-t nem tartalmazó oldalán keletkezett. 5 ilyen pont valóban mindig egy síkban van, mert pl. az A-ból kiinduló élek végpontjai a $B_1B_2B_3B_4B_5=\ddot{O}$ (síkbeli) ötszöget alkotják, a mondott 5 pont pedig ennek 1/3 arányú kicsinyített képe, A-ból mint hasonlósági középpontból, tehát rajta van azon a síkon, amely $\ddot{O}$ síkjával párhuzamos és átmegy az AK szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontján.

Vegyük hosszúságegységnek a tv-labda élét, ekkor 3 egységnyi élű ikoszaéderből kell kiindulnunk, ennek térfogata $27\,V$, ahol V az *a)* részben kapott térfogat.

A lemetszett gúla ekkor egybevágó az 1472. feladatbeli $A\ddot{O}$ gúlával. Ezt az AKB_i háromszögek mentén ($i=1$, 2, 3, 4, 5) 5 egybevágó háromoldalú gúlára daraboljuk. Az idézett feladat szerint közös magasságuk, valamint az $\ddot{O}$ köré írt kör r_5 sugara, a KB_iB_{i+1} egyenlő szárú háromszög szára

$$m=AK=\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)r=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},\qquad r_5=B_iK=\frac{2}{\sqrt{5}}r=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},$$

így e háromszögek m_5 magasságára

$$m_5^2=r_5^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{20},$$

ennélfogva az $A\ddot{O}$ gúla térfogata:

$$V_g=5\cdot\frac{1}{2}m_5\cdot\frac{m}{3}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{200}}=\frac{\sqrt{30+10\sqrt{5}}}{24}=\frac{5+\sqrt{5}}{24}.$$

Az ikoszaédernek 12 csúcsa van, így a tv-labda térfogata

$$27\ V - 12\ V_g = \frac{135 + 45\sqrt{5}}{4} - \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = \frac{125 + 43\sqrt{5}}{4} \qquad (\approx 55{,}3 \text{ térfogategység}).$$

Erdődi György (Szeged, Rózsa F. g. III. o. t.)
Bajmóczy Ervin (Budapest, Ady E. Ált. Isk. 8. o. t.)

Megjegyzések. 1. V_g-t megkapjuk abból is, hogy vesszük azt az 5 gúlát, amely I térfogatának számításában az $A\ddot{O}$ gúla oldallapjain áll, és közös negyedik csúcsuk O. Ez $\ddot{O}$ alapú kettős gúla, és két része térfogatainak aránya $KA : KO$, ami a szabályos ötszög szerkesztése szerint $(\sqrt{5} - 1) : 1$. A kettős gúla térfogata $V/4$, így

$$v_g = \frac{V}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} - 1) + 1} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{48} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{5 + \sqrt{5}}{24}.$$

2. A labda térfogata számítható az *a)* részben alkalmazott szétdarabolás mintájára is, mint 20 db szabályos hatoldalú és 12 db szabályos ötoldalú gúla térfogatának összege. Ezek oldaléle egyenlő, ti. a labda csúcsainak a származtató ikoszaéder középpontjától való távolsága, az ötoldalú gúlák magassága azonban nagyobb a hatoldalúakénál, mert az egységnyi oldalú ötszög köré írt kör sugara kisebb, mint a hatszög köré írt köré. (A hatoldalú gúlák magassága az *a)* részben felhasznált d távolságnak, I beírt gömbje sugarának 3-szorosa.) Ez a számolás bonyolultabb.