



**I. megoldás.** A keresett  $P$  pont az  $A_1A_2$  szakasz  $40^\circ$  nyílású látókörvpárjának az  $A_3A_4$  szakasz  $120^\circ$  nyílású látókörvpárjával közös pontja. Elég venni azonban az ívpárokból azt az ívet, amely a szakasznak azon a partján van, mint az  $A_1A_2A_3A_4 = N$  négyszög, hiszen a  $120^\circ$ -os íveket az  $A_1A_2$  egyenestől elválasztja a vele párhuzamos  $A_3O$  egyenes – ahol  $O$  a szabályos hatszög középpontja, másrészt a  $40^\circ$ -os ív benne van a hatszög  $k$  körülírt körében – hiszen az utóbbinak pontjaiból  $A_1A_2$  látószöge csupán  $30^\circ$ , a  $120^\circ$ -os ívpárnak  $N$ -en kívüli tagja viszont  $k$ -n is kívül van, mert az  $A_3A_4$  ív pontjaiból  $150^\circ$  a látószög.

A megtartott  $i_1, i_2$  látókörvégek az ábra szerint két pontban metszik egymást, legyenek ezek  $P$  és  $P'$  úgy, hogy  $PA_3 < P'A_3$ , legyen  $i_1, i_2$  középpontja  $O_1$ , ill.  $O_2$ .

Az  $A_2PA_3$  látószög céljára kiszámítjuk a  $PA_2A_3$  háromszög másik két szögét.

$$(1) \quad PA_3A_2\angle = A_4A_3A_2\angle - A_4A_3P\angle = 120^\circ - A_4O_2P\angle/2 = \\ = 120^\circ - (A_4O_2O\angle + OO_2O_1\angle + O_1O_2P\angle)/2.$$

$$(2) \quad PA_2A_3\angle = A_1A_2A_3\angle - A_1A_2P\angle = 120^\circ - A_1O_1P\angle/2,$$

az utolsó szögön a  $P'$  pontot tartalmazó konkáv szög értendő:

$$A_1O_1P\angle = A_1O_1O\angle + OO_1O_2\angle + O_2O_1P\angle.$$

A felhasználandó szögeket az  $OO_2A_4$ ,  $OO_1O_2$ ,  $O_1O_2P$  és  $OO_1A_1$  háromszögekből számítjuk.

$OO_2A_4$  derékszögű háromszög, mert  $i_2$  kiegészítő ívéről  $i_2$ -t  $60^\circ$ -os szögben látni, és ugyanakkora az  $A_3A_4O\angle$ , ezért  $A_4O$  érinti  $i_2$ -t. Továbbá  $A_4OO_2\angle = 30^\circ$ , mert  $A_3A_4$  a  $k$  és  $i_2$  közös húrja, így  $A_4O_2O\angle = 60^\circ$ . A szabályos hatszög oldalát  $a$ -val jelölve  $O_2A_4 = O_2P = a/\sqrt{3} = 0,5774a$ ,  $O_2O = 2a/\sqrt{3}$ .

Az  $OO_1A_1$  háromszögben  $O$ -nál  $30^\circ$ -os,  $O_1$ -nél  $180^\circ - A_1O_1A_2\angle/2 = 180^\circ - A_1PA_2\angle = 140^\circ$ -os szög van, tehát  $OA_1O_1\angle = 10^\circ$ , így  $OO_1 = a \sin 10^\circ / \sin 40^\circ = 0,2701a$ ,  $A_1O_1 = PO_1 = a/2 \sin 40^\circ = 0,7779a$ .

$O_1OO_2\angle = 120^\circ$ , így a koszinusz-tétellel  $O_1O_2 = 1,311a$ , a szinusz-tétellel  $OO_1O_2\angle = 49,72^\circ$ , és így  $OO_2O_1\angle = 10,28^\circ$ .

Az  $O_1O_2P$  háromszög szögeit a félszög-képletekkel számítjuk az oldalakból:  $O_2O_1P\angle = 12,64^\circ$ ,  $O_1O_2P\angle = 17,14^\circ$  (vagy a koszinusz-tétel alapján).

Eredményeinket beírva (1)-be és (2)-be

$$A_2PA_3\angle = 180^\circ - PA_2A_3\angle - PA_3A_2\angle = 180^\circ - 18,82^\circ - 76,29^\circ = 84,9^\circ.$$

$P'$  a  $P$ -nek tükrös párja  $O_1O_2$ -re, ezért az innen vett látószög céljára az  $O_1O_2P$  és az  $O_2O_1P$  szöget hozzáadás helyett kivonjuk:  $A_2P'A_3\angle = 55,11^\circ$ .

A dolgozatok többsége koordináta-geometriai úton oldotta meg a feladatot (ahogyan az országos felmérésben, az ún. háromszögelésben is a pontokat koordinátáikkal tekintik meghatározottnak). Ilyen a következő.

**II. megoldás** (vázlat). Legyen a derékszögű koordinátarendszer  $X$ -tengelye az  $A_4A_1$  egyenes, origója az  $A_4A_1$  szakasz felezőpontja, hosszúságegysége az  $OA_1$  szakasz. A fenti jelöléseket tovább is használjuk.  $OO_1$  egyenlete  $y = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$ ,  $A_1O_1$  egyenlete  $y = (x-1) \cdot \operatorname{tg}(-10^\circ)$ , ezek metszéspontjaként  $O_1$  koordinátái 3 tizedes pontossággal:  $(0,234; 0,135)$ , és az  $i_1$ -et tartalmazó kör egyenlete:

$$(x - 0,234)^2 + (y - 0,135)^2 = 0,6051.$$

Hasonlóan az  $i_2$ -t tartalmazó kör egyenlete:

$$(x+1)^2 + (y-1/\sqrt{3})^2 = 1/3.$$

Metszéspontjaik koordinátái:

$$P(-0,432, 0,551), \quad P'(-0,538, 0,231),$$

Másrészt

$$A_2(0,5, 0,866), \quad A_3(-0,5, 0,866),$$

így a keresett pontból az előírt pontokba mutató felegyenes iránytangense, majd irányszöge  $PA_3$  esetén

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{0,866 - 0,551}{-0,500 + 0,432} = -\frac{0,315}{0,077} = -4,09, \quad \varphi_3 = 103,7^\circ.$$

Hasonlóan  $PA_2$  irányszöge  $\varphi_2 = 18,9^\circ$ , ezekből  $A_2PA_3 \sphericalangle = \varphi_3 - \varphi_2 = 84,8^\circ$ , másrészt  $P'$  esetére  $A_2P'A_3 \sphericalangle = \varphi'_3 - \varphi'_2 = 86,6^\circ - 31,4^\circ = 55,2^\circ$ .

*Zambó Péter* (Miskolc, Földes F. g. II. o. t.)  
*Horváth Sándor* (Budapest, I. István g. III. o. t.)

**III. megoldás.** Az I. megoldás szerint  $P$  az  $N$  belsejében van, így az egymás utáni oldalak  $P$ -ből vett látószögeinek összege  $360^\circ$ . Legyen  $A_2PA_3 \sphericalangle = x$ , továbbá  $PA_3A_4 \sphericalangle = y$ ; ekkor  $A_4PA_1 \sphericalangle = 360^\circ - (40^\circ + x + 120^\circ) = 200^\circ - x$ ,  $PA_4A_3 \sphericalangle = 60^\circ - y$ ,  $PA_4A_1 \sphericalangle = y$ ,  $PA_1A_4 \sphericalangle = x - 20^\circ - y$ , másrészt  $PA_3A_2 \sphericalangle = 120^\circ - y$ ,  $PA_2A_3 \sphericalangle = 60^\circ + y - x$ ,  $PA_2A_1 \sphericalangle = x + 60^\circ - y$ .

A  $PA_1A_2$  és  $PA_1A_4$  háromszögekből a szinusz-tétel, majd az addíció-tétel alapján kifejezhetjük  $y$ -t;

$$\frac{\sin PA_2A_1 \sphericalangle}{\sin A_2PA_1 \sphericalangle} = \frac{\sin(x + 60^\circ - y)}{\sin 40^\circ} = \frac{PA_1}{A_2A_1} = \frac{2 \cdot PA_1}{A_4A_1} = \frac{2 \sin PA_4A_1 \sphericalangle}{\sin A_4PA_1 \sphericalangle} =$$

$$= \frac{2 \sin y}{\sin(200^\circ - x)}, \text{ vagyis}$$

$$\frac{\sin(x + 60^\circ - y)}{\sin y} = \sin(x + 60^\circ) \operatorname{ctg} y - \cos(x + 60^\circ) = \frac{2 \sin 40^\circ}{\sin(200^\circ - x)},$$

$$(3) \quad \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}(x + 60^\circ) + \frac{2 \sin 40^\circ}{\sin(200^\circ - x) \sin(x + 60^\circ)}.$$

Másrészt hasonlóan a  $PA_4A_1$  és  $PA_4A_3$  háromszögekből

$$\frac{\sin PA_1A_4 \sphericalangle}{\sin A_1PA_4 \sphericalangle} = \frac{\sin(x - 20^\circ - y)}{\sin(200^\circ - x)} = \frac{PA_4}{A_1A_4} = \frac{PA_4}{2 \cdot A_3A_4} = \frac{\sin y}{2 \sin 120^\circ} =$$

$$= \frac{\sin y}{\sqrt{3}}, \text{ vagyis}$$

$$\frac{\sin [(x - 20^\circ) - y]}{\sin y} = \sin(x - 20^\circ) \operatorname{ctg} y - \cos(x - 20^\circ) = \frac{\sin(200^\circ - x)}{\sqrt{3}},$$

amiből, felhasználva, hogy  $\sin(200^\circ - x) = -\sin(20^\circ - x) = \sin(x - 20^\circ)$ ,

$$(4) \quad \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}(x - 20^\circ) + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(3)és (4) jobb oldalából az első tagok különbsége

$$\operatorname{ctg}(x + 60^\circ) - \operatorname{ctg}(x - 20^\circ) = \frac{\sin [(x - 20^\circ) - (x + 60^\circ)]}{\sin(x + 60^\circ) \sin(x - 20^\circ)} = \frac{-\sin 80^\circ}{\sin(x + 60^\circ) \sin(x - 20^\circ)},$$

a nevező azonos (3) második tagja nevezőjével és a  $2 \sin u \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v)$  azonosság felhasználásával így alakul:  $[\cos 80^\circ - \cos(2x + 40^\circ)]/2$ , ezért (3) és (4) különbségéből

$$\frac{4 \sin 40^\circ - 2 \sin 80^\circ}{\cos 80^\circ - \cos(2x + 40^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos(2x + 40^\circ) = \cos 80^\circ - 4\sqrt{3} \sin 40^\circ (1 - \cos 40^\circ) = -0,8682,$$

$$2x + 40^\circ = 180^\circ \pm 29,74^\circ,$$

$$x_1 = 84,87^\circ, \quad x_2 = 55,13^\circ.$$

*Sulyok Elza* (Nagybátony–Bányaváros, Gimn., II. o. t.)