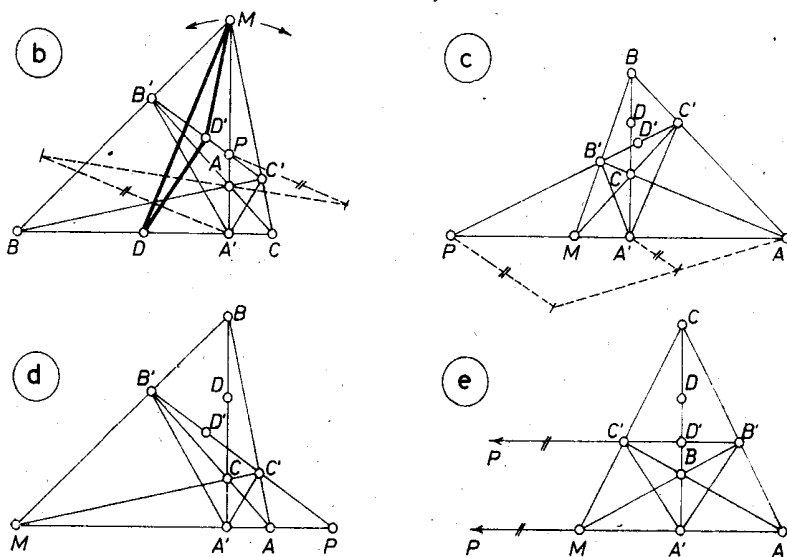


[illegible]

Tekintsük az $A'A$ szögfelezővel kettévágott talpponti háromszögnek $C'A'P$ részháromszögét, és alkalmazzuk ennek C' -ből kiinduló $C'M$ és $C'A$ szögfelezőire a szögfelezők osztásarányára vonatkozó tételt (1. a és b ábra, csupán A és M külső, ill. belső szerepe cserélődik fel):

$$\frac{A'M}{PM} = \frac{A'C'}{PC'} = \frac{A'A}{PA}.$$



A két szélső arány egybevetéséből rendezéssel kapjuk (1)-et. Ugyanez az 1. c és 1. d ábra esetében is érvényes, itt a $C'A'P$, ill. a $B'A'P$ háromszög magában tartalmazza a talpponti háromszöget. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. (Ha P nem jön létre (pl. 1. e ábra), mert $B'C' \perp BC$, tehát $B'C' \parallel AA'$, akkor az állítás tárgytalan.)

A kívánt szerkesztés céljára megállapítjuk, hogy M és A egyike az $A'P$ szakaszon van – ti. közülük a belső szögfelezőn levő pont –, másika pedig az $A'P$ szakasz meghosszabbításán, ennél fogva fordítva is, az A', P pontpár egyike belső pontja az AM szakasznak, másika pedig e szakasz meghosszabbításán van.

b) Az (1) alapján adandó szerkesztésben – az 1447. feladat betűzését megtartva – a BC és a $B'C'$ oldal D , ill. D' felezőpontját tekintjük adotttnak. Az ottani I. és II. megoldásból felhasználjuk, hogy egyrészt $B'C' \perp DD'$, másrészt hogy MDC és $MD'B'$ hasonló háromszögek, és megfelelő csúcsaik egymás utáni körüljárásában az irány egymással ellentétes, ezért a DM félegyenest DC -be átvivő elfordulás egyenlő és ellentétes irányú a $D'M$ -et $D'B'$ -be átvivő elfordulással.

2. Ezek alapján megrajzoljuk a $B'C' = d$ egyenest, ebből a közte és MD' között levő szög átmásolásával a $BC = a$ egyenest, és ekkor az M -ből a -ra állított merőleges, az AA' magasságegyenes, kimetszi $B'C'$ -ből P -t, BC -ből A' -t.

Ezután az A' , P , M ponthármashoz megszerkesztjük az (1)-nek eleget tevő A pontot, figyelembe véve a négy pont kölcsönös helyzetéről fent mondottakat.

Az A pont meghatározását megkönnyíti a következő észrevétel: az ABC háromszögben az AM és a BC szakaszok fölé rajzolt k , k_1 Thalész-körök átmennek a B' , C' pontokon, így centrálisuk nem más, mint a $B'C'$ közös húr felező merőlegese, vagyis a DD' egyenes. Emiatt a DD' egyenes az $A'M$ egyenest az AM szakasz O felezőpontjában metszi.

Legyen DD' és $A'M$ metszéspontja O , és az O középpontú, M -en átmenő kör k , ebben M -nek átellenes pontja A . k -nak d -vel alkotott metszéspontjait tetszőleges sorrendben B' -nek, C' -nek véve, kapjuk az AB' , AC' oldalegyeneseket, melyekből az MC' , MB' magasságvonalak metszik ki a C , B csúcsokat.

Mivel k_1 -ben BC átmérő, $B'C'$ húr, így $BC > B'C'$, és az MBC , $MB'C'$ háromszögek hasonlósága miatt $MD > MD'$ következik. Ez tehát a szerkeszthetőség szükséges feltétele. Ez a feltétel nem zárja ki M és D' egybeesését, amikor – mint azt korábbi megoldásainkban láttuk – derékszögű háromszöget kapunk, végtelen sok megoldás van.

Szerkesztésünk helyességének a vizsgálatánál feltesszük, hogy D , D' , M különböző pontok, és $MD > MD'$, továbbá hogy M nincs rajta a DD' egyenesen. Ekkor szerkesztésünk szerint a d és a egyenesek meghatározhatók. Ha M a d egyenesen van, akkor a is átmeny M -en szerkesztésünk szerint, és A' , valamint P azonos M -mel. Az $A'M$ egyenesnek ebben az esetben az M -ben a -ra emelt merőleges felel meg, és mivel az $a = MD$ egyenes nem merőleges DD' -re, O ebben az esetben is meghatározható.

Ha M nincs rajta d -n, akkor az a -n levő A' vetülete M -től különböző pont. Megmutatjuk, hogy az a forgatás, mely a DM egyenest DD' -be viszi, az $A'M$ egyenest MD' -vel párhuzamos h helyzetbe viszi. Valóban, MD -t először D körül δ -val elforgatva $D'D$ -be jutunk, majd 90° -kal elforgatva d -be, végül δ' -vel elforgatva MD' -be. Ha e három forgatást más sorrendben hajtjuk végre, nevezetesen MD -t először δ' -vel forgatjuk el, akkor a -t kapjuk, majd 90° -kal elforgatva kapjuk MA' -t, végül ezt az egyenest δ -val forgatva kapjuk h -t. E három forgatás végeredménye – irány szempontjából – nem függ sorrendjüktől, tehát h párhuzamos MD' -vel, vagyis az $A'M$ egyenest M körül δ -val elforgatva az MD' egyenest kapjuk. Mivel a $\delta = MDD' <$ kisebb a $DD'M$ szögnél (hiszen $MD' < MD$), az $A'M$ egyenes a DD' egyenest a D' -n túli meghosszabbításában metszi. Így az O pont mindig létrejön, és D' az OD szakaszon van.

Az MOD' háromszög D' -nél levő szöge a $DD'M$ háromszög külső szöge, így nagyobb az MDD' , és az azzal egyenlő OMD' szögnél, ezért az MOD' háromszögben MO -val szemben nagyobb szög van, mint $D'O$ -val szemben ezért $MO > D'O$, tehát D' a k belsejében van, a B' , C' metszéspontok valóban létrejönnek.

Ha M és A egyike sem azonos a B' , C' pontokkal, akkor az AB' , MC' egyenesek meg vannak határozva két-két pontjukkal, és nem párhuzamosak, hiszen B' , C' nem lehetnek k átellenes pontjai, így C létrejön, és hasonlóan bizonyítható B létezése is.

A kapott ABC háromszögben BB' , CC' magasságvonalak, M tehát magasságpont és $AM \perp BC$, $BC \parallel A'D$. A BC szakasz D^* felezőpontja elemzésünk szerint az OD' egyenesen van, hiszen ez k és k_1 centrális, és MBC , $MB'C'$ hasonlósága, valamint szerkesztésünk miatt $MD \parallel MD^*$, azaz D^* az MD egyenesen is rajta van. Eszerint D^* azonos az OD' , MD egyenesek közös pontjával, D -vel, tehát ABC a keresett háromszög.

Ha M a B' , C' pontok egyikével, mondjuk B' -vel azonos, akkor C is azonos M -mel, és B -t az MD , AC' egyenesek metszéspontja adja. Ebben az esetben C -nél derékszög van, és M valóban magasságpont, D , D' pedig az előírt szakaszokat felelik.

Ha A azonos a B' , C' egyikével, akkor feladatunknak nincs megoldása.

Végül, ha M a DD' egyenesen van, akkor O nem jön létre, így A -t közvetlenül (1) alapján kell megszerkesztenünk: ha M a DD' szakaszon van, a DD' fölé rajzolt k_2 Thalész-kört a DD' -re M -ben emelt merőleges messe az U , V pontokban, ekkor a k_2 kör U és V -beli érintőinek a metszéspontja lesz A ; ha pedig M a DD' szakasz meghosszabbításán van, akkor az M -ből k_2 -höz húzott érintők érintési pontja lesz U és V , és DD' -ből az UV egyenes metszi ki A -t. A szerkesztés további lépései, és a szerkesztés helyességének a bizonyítása ennek megfelelően módosul.