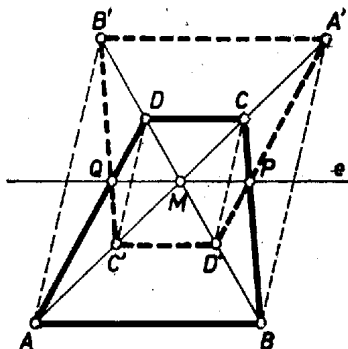


**I. megoldás.** Megmutatjuk, hogy minden  $ABCD = N$  konvex négyszöghöz van kívánt tulajdonságú  $e$  egyenes. Legyen  $N$  tükörképe az  $M$  pontra az  $A'B'C'D' = N'$  négyszög. Ha  $AM = MC$ , akkor az  $AC$  átló egyenes megfelel  $e$ -nek; mindkét szemközti oldalpárral való metszéspontja  $A$  és  $C$ , így a feladat állítása is nyilvánvalóan teljesül.

Ha még  $BM = MD$  is teljesül, akkor  $N$  paralelogramma, minden, az  $M$ -en átmenő egyenes megfelel  $e$ -nek és világos, hogy mindre teljesül a feladat állítása. Ha  $BM \neq MD$ , akkor  $B'$  és  $D'$  közül egyik  $N$  belsejében van, a másik rajta kívül, ezért  $N'$  határának  $AB'C$  és  $CD'A$  része közül egyik a végpontjaitól eltekintve  $N$  belsejében van, a másik rajta kívül, így  $AC$ -n kívül nincs más,  $e$ -nek megfelelő egyenes.

Vizsgáljuk a továbbiakban azt az esetet, ha  $M$  egyik átlót sem felezi. Válasszuk a betűzést úgy, hogy  $AM > CM$  és  $BM > DM$  teljesüljön. Ekkor  $C'$ ,  $D'$ , s így az egész köztük levő szakasz  $N$ -ben van, az  $A'B'$  szakasz  $N$ -en kívül van. Az  $A'D'$  szakasz metszi a  $BC$  szakaszt egy  $P$  pontban, mert az  $A'B'D'$  háromszög tartalmazza  $C$ -t,  $B$  viszont a  $B'D'$  oldal meghosszabbításán van,  $A'B'$  pedig, mint láttuk,  $N$ -en kívül (1. ábra).



1. ábra

$P$  tükörképe,  $Q$ , rajta van  $N'$ -n, mert  $P$  az  $N$ -en van, és mivel  $P$  az  $N'$ -n is rajta van, az a pont, aminek ő a tükörképe, vagyis  $Q$ , rajta van  $N$ -en is. A  $PQ$  egyenes tehát alkalmas  $e$ -nek, és ez az egyetlen ilyen, mivel  $P$ -n és  $Q$ -n kívül nincs  $N$  és  $N'$  kerületének közös pontja.

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy ha  $PQ$  metszi az  $AB$ ,  $CD$  oldalak egyikét, akkor metszi a másikat is, és a metszéspontok egymás tükörképei  $M$ -re.

$e$  csak akkor nem metszi pl.  $CD$ -t, ha párhuzamos vele. Megmutatjuk, hogy ez csak úgy lehetséges, ha  $e$  az  $AB$ -t sem metszi, azaz ha ezzel is párhuzamos. Tegyük fel, hogy  $CD \parallel PQ$ , és alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a  $CAD$  és  $CBD$  szögekre (1. ábra):

$$\frac{CA}{MA} = \frac{CD}{MQ} = \frac{DC}{MP} = \frac{DB}{MB},$$

a szélső arányokból 1-et-1-et levonva

$$\frac{CA}{MA} - 1 = \frac{CA - MA}{MA} = \frac{CM}{MA} = \frac{DM}{MB},$$

ezek a szakaszok az egymást  $M$ -ben metsző  $AC$ ,  $BD$  egyeneseken fekszenek, így valóban  $CD \parallel AB$ , tehát  $PQ \parallel AB$ , amint állítottuk.

Itt nem használtuk fel az átlók részeinek nagyságviszonyára vonatkozó fentebbi feltevéseket, ezért bizonyításunk az  $AB \parallel PQ$  és  $MP = MQ$  feltevésből kiindulva is érvényes. Ezzel a feladat állításának első részét bebizonyítottuk.

Azt is kaptuk, hogy ha a mondott  $PQ$  egyenes nem metszi az  $AB$ ,  $CD$  egyenesek egyikét, akkor  $N$  trapéz (és a tett korlátozás folytán  $AB \neq CD$ ). Fordítva, ha  $AB \parallel CD$  és  $AB \neq CD$ , akkor  $PQ \parallel AB$ . Ugyanis az  $ABA'B'$  és  $C'D'CD$  paralelogrammák hasonló helyzetűek az  $M$  középpontra vonatkozóan, így  $BA'CD'$  trapéz, és az átlóinak  $P$ , valamint szárainak  $M$  metszéspontját összekötő  $e$  egyenes felezi a  $BA'$ ,  $CD'$  alapokat, tehát az előbbi paralelogrammáknak középvonala.

Eszerint ha  $N$  nem trapéz, akkor  $AB$  és  $CD$  metszik egymást egy  $T$  pontban, másrészt  $PQ$  metszi  $AB$ -t,  $CD$ -t egy  $R$ , ill.  $S$  pontban, és azt kell megmutatnunk, hogy  $MR = MS$



Ebből (1) második tagjának hasonló alakítását az 1-es index 2-esre cserélésével kapjuk, a 3. és 4. tagéit pedig az első kettőből a  $G$  betűknek  $F$ -re cserélésével, ami által kellő egyszerűsítések után (1) a nyilvánvalóan igaz

$$\frac{\sin OHG_1 \triangleleft}{\sin G_1 HG_0 \triangleleft} : \frac{\sin OHG_2 \triangleleft}{\sin G_2 HG_0 \triangleleft} = \frac{\sin OHF_1 \triangleleft}{\sin F_1 HF_0 \triangleleft} : \frac{\sin OHF_2 \triangleleft}{\sin F_2 HF_0 \triangleleft}$$

egyenlőségbe megy át.

*Takács László* (Sopron, Széchenyi I. Gimn.) és  
*Mészáros József* (Makó, József A. Gimn.)  
dolgozatainak felhasználásával és kiegészítésekkel

**II. megoldás** (vázlat). Az állítás második részét koordináta-geometriai úton bizonyítjuk, támaszkodva az I. megoldás azon részeire, amelyek szerint az  $e = PQ$  egyenes általában egyértelműen létezik.

$y$  tengelynek a  $PQ$  egyenest, origónak az  $M$  pontot választjuk, legyen továbbá  $P$  ordinátája  $-p$ , így  $Q$ -é  $p$ , az ezeken átmenő oldalegyenesek, valamint az átlók egyenesének egyenlete:

$$\begin{array}{ll} BC : & y = bx - p, \\ BD : & y = nx, \quad (n \neq a, b) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} AD : & y = ax + p, \\ AC : & y = mx. \quad (m \neq a, b) \end{array}$$

Így azt kell megmutatnunk, hogy az  $y$  tengely és az  $AB$ , ill.  $CD$  egyenes metszéspontja közti szakaszt  $M$  felezi, a két ordináta egymásnak  $(-1)$ -szerese.

$AD$  és  $AC$  egyenletéből  $A$  abszcisszája

$$x_A = \frac{p}{m - a},$$

többi csúcsoét ebből az alábbi helyettesítésekkel kapjuk:

|              |      |     |     |         |
|--------------|------|-----|-----|---------|
|              | $p$  | $m$ | $a$ | helyére |
| $C$ esetében | $-p$ | $m$ | $b$ | lép     |
| $B$ esetében | $-p$ | $n$ | $b$ | lép     |
| $D$ esetében | $p$  | $n$ | $a$ | lép.    |

Azt is mondhatjuk, hogy  $D$  abszcisszáját  $B$ -éből úgy kapjuk, hogy  $p$  és  $b$  helyére rendre  $-p$ -t,  $a$ -t írunk. Az ordináta mindig az abszcissza  $m$ -szerese, ill.  $n$ -szerese.

Általában az  $L_1(u_1, v_1)$ ,  $L_2(u_2, v_2)$  pontokkal meghatározott egyenes és az  $y$  tengely metszéspontjának ordinátája az

$$y = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(x - u_1), \quad x = 0$$

egyenletrendszerből:

$$v_1 + \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}(-u_1) = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_2 - u_1}.$$

Legyen itt  $L_1 = A$ ,  $L_2 = B$ , így az  $AB$  oldalegyenes és a  $PQ$  egyenes  $R$  metszéspontjának ordinátája, a fentiek felhasználásával:

$$\begin{aligned} \frac{u_2 m u_1 - u_1 n u_2}{u_2 - u_1} &= \frac{(m - n) u_1 u_2}{u_2 - u_1} = \frac{m - n}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} = \\ &= \frac{m - n}{\frac{m - a}{p} + \frac{n - b}{p}} = \frac{(m - n)p}{(m + n) - (a + b)}. \end{aligned}$$

Ebből könnyen megkapjuk a  $CD$  egyenes  $y$  tengelyen levő  $S$  pontjának ordinátáját,  $A$  helyére  $C$ -t és  $B$  helyére  $D$ -t írva, ugyanis – mint láttuk – eközben  $p$  helyére mindkét helyettesítés miatt  $-p$  lép, a másik helyettesítés viszont – ti.  $a$  helyére  $b$ , ill.  $b$  helyére  $a$  – egymástól független. Így  $S$  ordinátája

$$\frac{(m - n)(-p)}{(m + n) - (b + a)},$$

és ez az előrebocsátott megjegyzés szerint az állítást igazolja.

Itt nem volt célunk annak elemzése, hogy a metszéspontok milyen  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$  értékrendszerek esetén léteznek. Azt mindenesetre látjuk, hogy  $S$  létezésének feltételei ugyanazok, mint  $R$  létezésének feltételei. Ezzel teljesítettük kitűzött célunkat.