

I. megoldás. Ha létezik megfelelő a, b számpár, akkor az $a/b = r$ hányados is racionális szám. (Nem lehet $b = 0$, mert így (1) nem teljesülne, hiszen bal oldala csak 2 lehetne.) $a = br$ helyettesítéssel (1) így alakul:

$$\frac{r+1}{r} + \frac{r}{r+1} = b.$$

És innét azonnal látjuk, hogy $r = 0$ és $r = -1$ kivételével minden racionális szám megad egy megfelelő b, a számpárt:

$$b = \frac{r+1}{r} + \frac{r}{r+1}, \quad a = r+1 + \frac{r^2}{r+1}.$$

Pintz János (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A fenti megoldásnál valamivel még egyszerűbb a következő. A bal oldal két tagja racionális szám és egymás reciproka (így egyik sem lehet 0). Pl. az első r' -vel jelölve

$$(2) \quad b = r' + \frac{1}{r'}, \quad \text{ahol} \quad \frac{a+b}{a} = r', \quad \text{így}$$

$$(3) \quad a = \frac{1}{r'-1} \cdot b = \frac{1}{r'-1} \left(r' + \frac{1}{r'} \right), \quad \text{ha } r' \neq 1.$$

Ha r' a 0-tól és 1-től különböző racionális szám, akkor (2) és (3) racionális b -t és a -t ad. (Az is látható, hogy megkaptuk az összes racionális megoldást.)

II. megoldás. A törteket eltávolítva és a szerint rendezve (1) így alakul:

$$(4) \quad (2-b)a^2 + b(2-b)a + b^2 = 0.$$

b számára csak olyan érték használható, amelyre a diszkrimináns r_1 négyzetgyöke racionális szám:

$$D = b^2(2-b)^2 - 4(2-b)b^2 = b^2(b^2-4) = r_1^2,$$

azaz

$$(5) \quad \begin{aligned} b^2 - 4 &= r_2^2, \\ b^2 &= r_2^2 + 4, \end{aligned}$$

ahol r_2 ugyancsak racionális szám.

Egész számokban keresve megoldást, csak $r_2 = 0$, $b^2 = 4$, $b = \pm 2$ jön szóba. Azonban $b = 2$ a (4)-gyel ellentmondásra vezet; $b = -2$ esetén $a = 1$ az egyetlen gyök, így az $a, b = 1, -2$ számpár megoldás, és máris kimondhatjuk, hogy a kérdésre a válasz igenlő.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Általában a racionális b -t és r_2 -t B/N , ill. R/N alakban keresve, ahol B, R, N egész számok, (5) a következőbe megy át:

$$R^2 + (2N)^2 = B^2.$$

Eszerint minden pitagoraszai számhármas szolgáltat egy-egy racionális megoldást:

$$b = \frac{u^2 + v^2}{uv}, \quad \left(r_2 = \frac{u^2 - v^2}{uv} \right), \quad a = \dots = \frac{u^2 + v^2}{v(v-u)},$$

ahol u, v egymástól és 0-tól különböző egész számok.

Takács László

2. Egyetlen a, b számpárt azonban könnyebben kaptunk volna (4)-nek b szerinti rendezéséből kiindulva:

$$(1-a)b^2 + a(2-a)b + 2a^2 = 0,$$

ugyanis ez az egyenlet $a = 1$ esetén elsőfokúvá egyszerűsödik, és így megoldása racionális: $b = -2$.