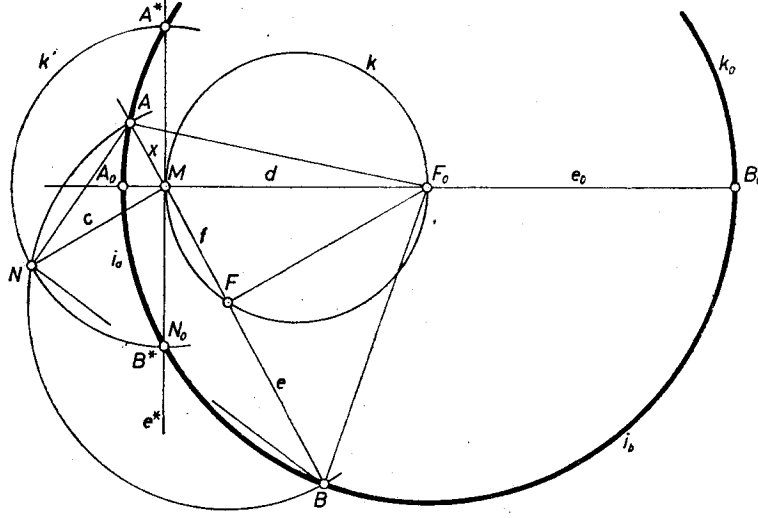


I. Az AM , MB szakaszokat először egyirányúaknak tekintjük. Az állandó $AM \cdot MB$ érték mértani középarányosuknak c -nek négyzete, $AM \cdot MB = c^2$. Feltesszük, hogy $c > 0$ (ugyanis $c = 0$ esetén $AM = 0$, az A pont állandóan M -ben van, így B az M -nek tükörképe F -re vonatkozóan, s ebből tüstént adódik, hogy B mértani helye az adott k kör 2-szeresre nagyított képe az M hasonlósági középpontból). Eszerint M mindig elválasztja A -t F -től és B -től.

Nyilvánvaló, hogy e bármely helyzetében F az e -nek k -val való, M -től különböző metszéspontja. Minden helyzetben M , F , c^2 és az $AM < MB$ feltétel egyértelműen meghatározza A és B helyzetét. A derékszögű háromszög magasságáról ismert mértani középarányos tételre gondolva egy megfelelő A , B pontpárt úgy kapunk, hogy az e -re M -ben emelt merőlegesre fölmérjük az $MN = c$ szakaszt, kört írunk F körül FN sugárral, ennek az FM félegyenesen levő metszéspontja A , e -vel való másik metszéspontja B (1. ábra).



1. ábra

Így ugyanis Thalész tétele szerint ABN derékszögű háromszög, és a derékszög csúcsa N . Az alábbi számítás pedig azt mutatja, hogy ez az egyetlen megoldás.

Legyen ugyanis $FM = f$ és $AM = x$ (> 0), ekkor $MB = MF + FB = MF + AF = AM + 2MF = x + 2f$, az $x(x + 2f) = c^2$ követelményből $x^2 + 2fx - c^2 = 0$, ennek gyökei valósak és ellentétes előjelűek, hiszen szorzatuk negatív, és a negatív gyök nem használható. Az adódó $x = \sqrt{f^2 + c^2} - f$ kifejezésből is kiolvasható A fenti szerkesztése.

e -nek csak az az e^* helyzete kivételes, amely érinti k -t, ekkor ugyanis F^* azonos M -mel és a mondott eljárás szerint kapott A^* , B^* pontpárra az $A^*M = MB^* = c$ egyenlőség teljesül, és ezt a feladat kizárta.

Az e néhány helyzetében így szerkesztett A , B pontpárok egy k_0 körön látszanak sorakozni, melynek középpontja M -nek k -beli átellenes pontja, F_0 . (Az N pontok mindig az M körüli c sugarú k' körön adódnak.) Bebizonyítjuk, hogy e minden megengedett helyzetében $F_0A = F_0B$, állandó.

e -ként az $MF_0 = e_0$ egyenest véve legyenek a fenti eljárás során kapott pontok N_0 , A_0 , B_0 , így

$$(1) \quad F_0A_0^2 = F_0B_0^2 = F_0N_0^2 = F_0M^2 + MN_0^2 = d^2 + c^2,$$

ahol d a k átmérője. e minden más, megengedett helyzetében F az F_0 merőleges vetülete e -n (Thalész), és $FA = FB$ folytán $F_0A = F_0B$. Továbbá

$$F_0B^2 = F_0F^2 + FB^2 = F_0F^2 + (MB - MF)^2 = (F_0F^2 + MF^2) + MB(MB - 2MF),$$

és itt az első zárójelben $F_0M^2 = d^2$ áll, a második zárójel pedig

$$(MB - MF) - MF = FB - MF = AF - MF = AM,$$

tehát, felhasználva (1)-et:

$$F_0B^2 = d^2 + MB \cdot AM = d^2 + c^2 = F_0A_0^2,$$

ami állításunkat igazolja, A és B a mondott k_0 kör pontjai. Ugyanez A^* -ra és B^* -ra is áll, és $e^* \perp e_0$ miatt mindegyikük játszhatja a fenti N_0 szerepét.

Pontosabban ezt találtuk: mivel M elválasztja A -t F -től, vagyis k -től, azért e^* is elválasztja A -t k -től, A a k_0 -nak félkörnél kisebb $A^*B^* = i_a$ ívén van, B pedig a félkörnél nagyobb $A^*B^* = i_b$ ívén.

Bebizonyítjuk, hogy megfordítva, ha e -nek egy tetszés szerinti (de e^* -től különböző) e' helyzete i_a -t A' -ben, i_b -t B' -ben metszi, akkor teljesül $A'M \cdot MB' = c^2$, és az $A'B'$ szakasz F' felezőpontja rajta van k -n. Valóban, e' és e^* a k_0 -nak M -en átmenő és egymástól különböző szelői, ezért $A'M \cdot MB' = A^*M \cdot MB^* = c^2$. Továbbá $F_0F'A' \angle F_0F'M \angle$ derékszög, tehát F' rajta van az MF_0 átmérőjű Thalész körön, vagyis k -n.

