

Az  $A$ ,  $B$  és  $C$ ,  $D$  számjegy-párok ismétlődése alapján a keresett  $N^2$  szám így írható:

$$101 \cdot \overline{AB} \cdot 10^4 + 101 \cdot \overline{CD} = 101(\overline{AB} \cdot 10^4 + \overline{CD}) = 101 K.$$

Mivel 101 törzsszám, és négyzetszámnak különböző alapú törzsszámhatványok szorzatára való felbontásában minden kitevő páros, azért a  $K$  szám egy négyzetszám 101-szerese. Továbbá  $10^4 = (10^4 - 1) + 1 = 101 \cdot 99 + 1$ , így

$$K = 101 \cdot 99 \cdot \overline{AB} + (\overline{AB} + \overline{CD}) = 101 \cdot M^2,$$

(azaz  $M = N/101$ ), tehát  $\overline{AB} + \overline{CD}$  is (pozitív egész) többszöröse 101-nek. Ámde  $1 \leq \overline{AB} < 100$  és  $1 \leq \overline{CD} < 100$  miatt  $2 \leq \overline{AB} + \overline{CD} < 200$ , és 101-nek már a 2-szerese is több 200-nál, ezért

$$(1) \quad \overline{AB} + \overline{CD} = 101, \quad \text{így} \quad M^2 = 99 \cdot \overline{AB} + 1,$$

$$(2) \quad (M - 1)(M + 1) = 3^2 \cdot 11 \cdot \overline{AB}.$$

Ismét  $1 \leq \overline{AB} < 100$  miatt  $M^2$  legalább háromjegyű, legfőljebb négyjegyű négyzetszám, vagyis egy valódi kétjegyű szám négyzete.

(2) bal oldalának egyik tényezője osztható 11-gyel. Úgyszintén egyik tényező osztható 9-cel, mert nem lehet mindkét tényező 3-mal osztható, ugyanis különbségük 2.

Próbálkozzunk olyan megoldással, melyben (2) bal oldalának ugyanazon tényezője osztható 9-cel is, 11-gyel is, vagyis 99-cel is. Ez  $M < 100$  miatt csak  $M + 1$  lehet, ha  $M = 98$ , ekkor  $M - 1 = 97 = AB$ , továbbá (1) alapján  $CD = 4 = 04$ . Így  $A = 9$ ,  $B = 7$ ,  $C = 0$ ,  $D = 4$ , különbözők, megoldást kaptunk. (Valóban, így  $N = 101 \cdot M = 9898$ , és  $N^2 = 9797\,0404$ , ami már a fentiekből szükségképpen következik.)

Olyan megoldást keresve, melyben (2) bal oldalának egyik tényezője 11-gyel, a másik 9-cel osztható, elég a  $11k \pm 2$  számok 9-cel való oszthatóságát vizsgálnunk, hiszen a tényezők különbsége 2. Csak  $k = 1$  és  $k = 8$  esete ilyen: 9 és 11, ill. 88 és 90, de az elsőből  $AB = 1 = 01$ ,  $\overline{CD} = 100$  adódik, ami nem felel meg; a másodikból viszont  $AB = (88 \cdot 90)/99 = 80$ ,  $\overline{CD} = 21$ , és ez ismét megoldás:  $A = 8$ ,  $B = 0$ ,  $C = 2$ ,  $D = 1$  ( $M = 89$ ,  $N^2 = 8989^2 = 8080\,2121$ ). Több megoldás nincs.

*Horváth Sándor* (Budapest, I. István g. III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Hasonlóan jutunk el a megoldásokhoz (1)-ből  $\overline{AB}$  kiküszöbölése útján is:  $M^2 = 99(101 - \overline{CD}) + 1 = 100^2 - 99 \cdot \overline{CD}$ ,  $(100 - M)(100 + M) = 3^2 \cdot 11 \cdot \overline{CD}$ .

2. Ugyanez az egyenlet így is írható:  $M^2 = 100^2 - (100 - 1) \cdot \overline{CD} = (100 - \overline{CD}) \cdot 100 + \overline{CD}$ , ami szerint  $M^2$ -et két kétjegyű számra vágva e részek összege 100. Végigfutva a kétjegyű számok négyzetén, csak  $89^2 = 7921$ -nek és  $98^2 = 9604$ -nek van meg ez a tulajdonsága,  $\overline{CD} = 21$  vagy 04.

Kevesebb próba is elég annak figyelembevételével, hogy  $\overline{CD}$  kétjegyű négyzetvégződés, így csak 22 különböző értéket vehet fel. Képezve ezekhez  $100 - \overline{CD}$ -t – pl.  $\overline{CD} = 56$  esetében 44-et – csak azt kell megnéznünk a táblázatban, négyzetszám-e 4456.

*Nagy Zsigmond* (Budapest, Kaffka M. g. III. o. t.)

3.  $M^2$ -nek az előző megjegyzés szerinti kettévágását így is kimondhatjuk:  $M^2$ -nek a száz-alapú számrendszerben vett két számjegye együtt százat kell hogy adjon.

A száz-alapú számrendszerben ugyanaz az oszthatósági ismertetőjel érvényes a „százegy”-gyel való oszthatóságra, mint a tíz-alapú rendszerben a tizenegyre. (Az utóbbi szerint a szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha jobbról bal felé haladva minden második jegy elé mínuszjelet gondolva, az összes jegyek 11-gyel osztható összeget adnak. Ezt alkalmazva a fenti  $K = \overline{AB00CD}$  számra, kapjuk (1)-et.