

I. megoldás. Adjuk hozzá a polinomhoz x^3 -t és vonjuk is ki belőle. Ekkor, ismert azonosság alapján

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 - 1) = x^3(x^2 + x + 1) - \\ &- (y - 1)(x^2 + x + 1) = (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1), \end{aligned}$$

tehát az illető sejtése igaz.

Bán Ilona (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan, a mértani sorozat összegképletét fölhasználva

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x) = \\ &= \frac{x^6 - 1}{x - 1} - \frac{x(x^3 - 1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1}(x^3 + 1 - x) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1). \end{aligned}$$

Cserha Gabriella (Makó, József A. g. II. o. t.)

2. A talált felbontás megtalálható az 1289. feladatban is, K. M. L. 29 (1964) 128. o.

Ilyen szerencsés észrevétel hiányában az alábbiak szerint jutunk megoldáshoz.

II. megoldás. Keressünk fölbontást egy harmad- és egy másodfokú, egész együtthatós polinom szorzatára:

$$(2) \quad x^5 + x^4 + 1 = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$$

alakban. A két tényező legmagasabb fokú tagjában az együtthatók abszolút értéke csak 1 lehet, hiszen (2) azonosság volta miatt szorzatuk egyenlő x^5 együtthatójával, közös előjelüket pedig választhatjuk pozitívnak. Ugyanígy a változót nem tartalmazó tag jobbról és balról: $cq = 1$, így vagy $c = q = 1$, vagy $c = q = -1$. Abból, hogy x^4 , x^3 , x^2 és x együtthatója is egyenlő az azonosság két oldalán, az a , b , p ismeretlenekre az első esetben a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} (3) \quad & a + p = 1, \\ (4) \quad & b + ap + 1 = 0, \\ (5) \quad & 1 + bp + a = 0, \\ (6) \quad & p + b = 0. \end{aligned}$$

(3) és (6), valamint (5) és (4) különbségéből, az első különbség értékét mindjárt behelyettesítve

$$\begin{aligned} & a - b = 1, \\ & (a - b) + p(b - a) = (a - b)(1 - p) = 1 - p = 0, \end{aligned}$$

azaz $p = 1$, ezért (3)-ból $a = 0$, (6)-ból $b = -1$. Ez az értékhármas mind a négy egyenletet kielégíti, tehát

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1),$$

a sejtés helyes. – Így a $c = q = -1$ eset vizsgálata fölösleges.

Grandpierre Attila (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Azt, hogy $P(x)$ nem bontható egész együtthatós első és negyedfokú polinom szorzatára, beláthatjuk az együtthatók összehasonlítása nélkül is. Az elsőfokú polinom csak $x - c$ alakú lehetne s ekkor a c egész szám gyöke lenne a $P(x) = 0$ egyenletnek. Azonban $P(x) = x^4(x + 1) + 1$. Ha x egész, akkor itt az első tag páros szám (vagy x , vagy $x + 1$ páros), s így $P(x)$ értéke páratlan, tehát nem 0.

Vetier András (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

2. Sejtést kaphatunk a polinom felbontására, ha elemezzük a kérdés felvetőjének észrevételeit. Véve pl. a törzsszámhatványok szorzatára való alábbi felbontásokat. (amelyekben kevés és nagyobb törzsszám lép fel):

$$\begin{aligned} P(4) &= 1281 = 3 \cdot 7 \cdot \mathbf{61}, & P(6) &= 43 \cdot \mathbf{211}, & P(7) &= 3 \cdot 19 \cdot \mathbf{337}, \\ P(-4) &= -13 \cdot \mathbf{59}, & P(-8) &= -3 \cdot 19 \cdot \mathbf{503}, \end{aligned}$$

a vastagon szedett törzstényezők (az utóbbi kettőhöz hozzácsatolva a mínusz jelet is) rendre közel állnak a választott x érték köbéhez, $4^3 = 64$ -hez, $6^3 = 216$ -hoz, $7^3 = 343$ -hoz, $(-4)^3 = -64$ -hez, $(-8)^3 = -512$ -höz, és a hiány rendre 3, 5, 6, ill. -5 , -9 , minden esetben 1-gyel kisebb a beírt x -nél, vagyis e tényezők $x^3 - (x - 1)$ alakban írhatók.

A vékonyan szedett tényező viszont, vagy az ilyen tényezők szorzata x^2 -hez áll közel:

$$\begin{array}{lll} 3 \cdot 7 = 21 \text{ és } 16, & 43 \text{ és } 36, & 3 \cdot 19 = 57 \text{ és } 49, \\ 13 \text{ és } 16, \text{ végül} & & 57 \text{ és } 64, \end{array}$$

ez pedig az $x^2 + (x + 1)$ tényezőt sejteti. Bármelyikkel osztva $P(x)$ -et, nincs osztási maradék, a sejtés helyes.

3. A kérdés felvetőjének szerencséje volt a sejtéssel. Ellenpélda az

$$\frac{5}{6}x^3 - x^2 + \frac{1}{6}x \quad \left(= x^3 - x^2 - \frac{(x-1)x(x+1)}{6} \right)$$

polinom: minden egész x helyen egész az értéke.

4. A feladat háttérében *Gauss* következő tétele van: *ha egy egész együtthatós polinom felbontható racionális együtthatós polinomok szorzatára, akkor felbontható egész együtthatósak szorzatára is* (amelyek a racionális felbontáshól egy konstanssal és a reciprokéval való szorzás útján keletkeznek).