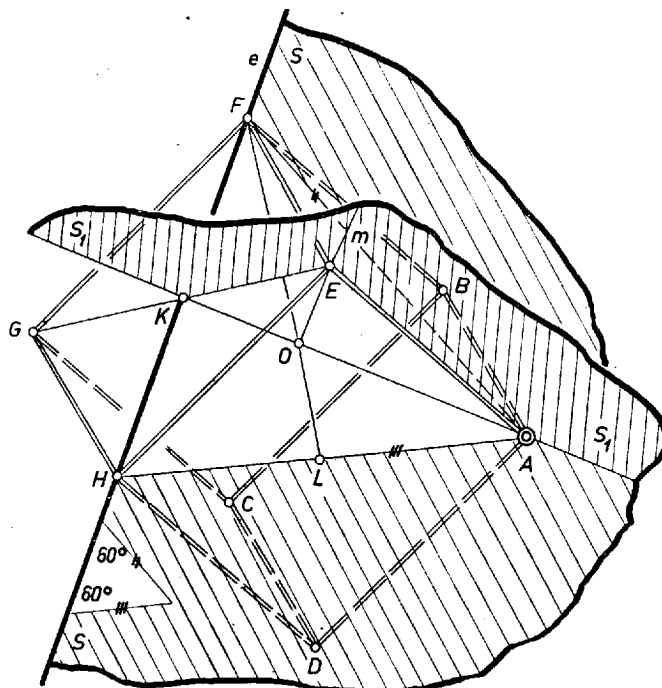


I. megoldás. 1. Legyen a keresett kockának az adott e -t tartalmazó lapja. $EFGH$, az e -n fekvő lap-átló FH , a szemben levő lap pedig $ABCD$ úgy, hogy a kocka hátra levő élei AE , BF , CG , DH .

FA és HA szintén lapbeli átlók, hosszuk egyenlő FH -val, ezért FHA egyenlő oldalú háromszög, benne fekszik az e és A által meghatározott S síkban.



1. ábra

EA , EF és EH a kocka élei, egyenlők, ezért $AFHE$ szabályos háromoldalú gúla, E főcsúcsa rajta van az AFH alap O középpontjában S -re állított merőlegesen. Továbbá az $AEO = S_1$ sík e gúlának szimmetriasíkja, tehát FH -t a K felezőpontjában metszi, ez az $EFGH$ lap középpontja, az EG lapátlót is felezi, és így $KE = EG/2 = FH/2 = KF$.

2. Ezek alapján a szerkesztés a következő. Az S síkban e -nek tetszés szerinti szakasza fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk, majd újabb két oldalával párhuzamost húzunk A -n át, ezek e -ből kimetszik az F , ill. H csúcsot. Megfelezzük az FH , HA oldalt a K , ill. L ponttal, ekkor AK és FL metszéspontja O . O -n át m merőleges egyenest állítunk S -re, majd az A és m által meghatározott S_1 síkban K körül KF sugárral írt körrel m -ből kimetsszük E -t. A hátra levő csúcsokat háromszögeknek paralelogrammává való kiegészítésével kapjuk: AEF -ből B -t, FEH -ből G -t, HEA -ból D -t, végül pl. BAD -ból C -t.

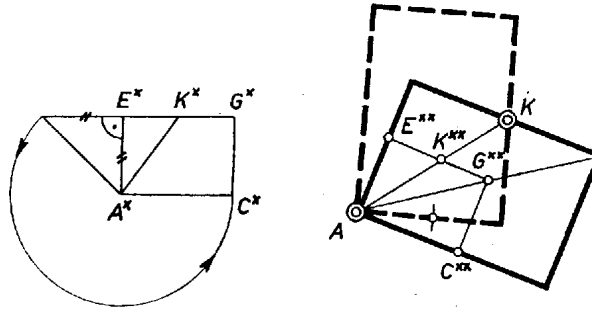
3. Alakzatunk valóban kocka. Ugyanis S_1 merőleges S -re; metszévonaluk AK , erre merőlegesen áll FH , így FH merőleges S_1 -re, tehát az S_1 -beli KE -re is. Ezért $EFGH$, mint egymásra merőleges és egyenlő hosszú átlókkal bíró paralelogramma, négyzet. Ugyanez áll $EABF$ -re és $EHDA$ -ra, mert ezek előállíthatók $EFGH$ -ből EO körüli 120° -os forgatással. Az utoljára szerkesztett C csúcs benne van a GHD és a GFB síkban is, mert szerkesztésünk szerint $DC \parallel AB \parallel EF \parallel HG$ és $BC \parallel AD \parallel EH \parallel FG$, és a mondott háromszögeket egyenlőoldalú paralelogrammává egészíti ki. Ezek négyzetek, úgyszintén $ABCD$ is, mert mindegyik szögük egyállású a fentebbi 3 négyzet egyik szögével.

4. A szerkesztés mindig végrehajtható, ha A nincs rajta e -n, mert a felhasznált kör metszi m -et. Ugyanis, $KA = d$ jelöléssel $KO = d/3$, $KE = KF = d/\sqrt{3}$, így $KE > KO$. E számára 2 metszéspont adódik, a belőlük származtatott 2 kocka egymás tükörképe S -re.

Lengyel Erzsébet (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.) és
Somogyi Árpád (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)
dolgozatából, a bizonyítással kiegészítve

Megjegyzések. 1. Az m egyenest az alábbiak szerint szerkeszthetjük, mindig csak síkbeli szerkesztést végezve. m -et megadja pl. annak a 2 síknak a metszévonal, mely átmegy O -n és merőleges AK -ra, ill. FL -re. Egy ilyen síkot, pl. az AK -ra merőlegesen állót, két az O -n átmenő egyenesével határozzuk meg: felveszünk AK -n át 2 különböző síkot – egyikük lehet pl. S – és mindegyikben megszerkesztjük az O -n átmenő, AK -ra merőleges egyenest. Ezek után a két merőleges síknak egy az O -tól különböző közös pontját, vagyis m egy további pontját úgy kapjuk, hogy az AK -ra merőleges síknak egy O -t nem tartalmazó egyenesén megkeressük az FL -re merőleges síkkal való dőféspontot. (Az utolsó lépésre, ti. az egyenes és a sík metszéspontjának meghatározására a térbeli szerkesztésekben az a megállapodás, hogy ha az egyenes és a sík adottak és tudjuk, hogy van metszéspontjuk – vagyis az egyenes nincs benne a síkban és nem is párhuzamos vele –, akkor a metszéspontot is adottnak tekintjük.)

2. E -t m -ből kimetszhetjük az AK szakasz fölé írt Thalész-körrel is. Ekkor a szerkesztés helyességének bizonyításában számításra van szükség: $KA = FH \cdot \sqrt{3}/2$, $KO = KA/3$, és mértani középárányosukként $KE^2 = KA \cdot KO = KA^2/3 = FH^2/4$, $KE = FH/2$.



2. ábra

II. megoldás (vázlat). Az A -n átmenő és az e -re merőleges S_1 sík metszéspontja K , e sík a kockából az $AEGC$ téglalapot metszi ki, melyben $AE : EG = 1 : \sqrt{2}$ és K felezi EG -t. Eszerint az AK szakaszhoz hasonlósági transzformációval megszerkeszthetjük a téglalapot. (Egy tetszés szerinti egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójával és átfogójával, mint oldalakkal, $A^*E^*G^*C^*$ téglalapot szerkesztünk, vesszük az $E^*G^* (= A^*E^* \cdot \sqrt{2})$ oldal K^* felezőpontját, A^*K^* -ot fölmérjük az AK félegyenesre az AK^{**} helyzetbe, az AK^*E^* háromszöget, majd a téglalapot átmásoljuk az $AK^{**}E^{**}$, ill. $AE^{**}G^{**}C^{**}$ helyzetbe, végül ezt nagyítva kapjuk $AEGC$ -t.) Ebből pedig K -n átmenő középvonala körüli 90° -os elfordítással megkapjuk a további 4 csücsöt.