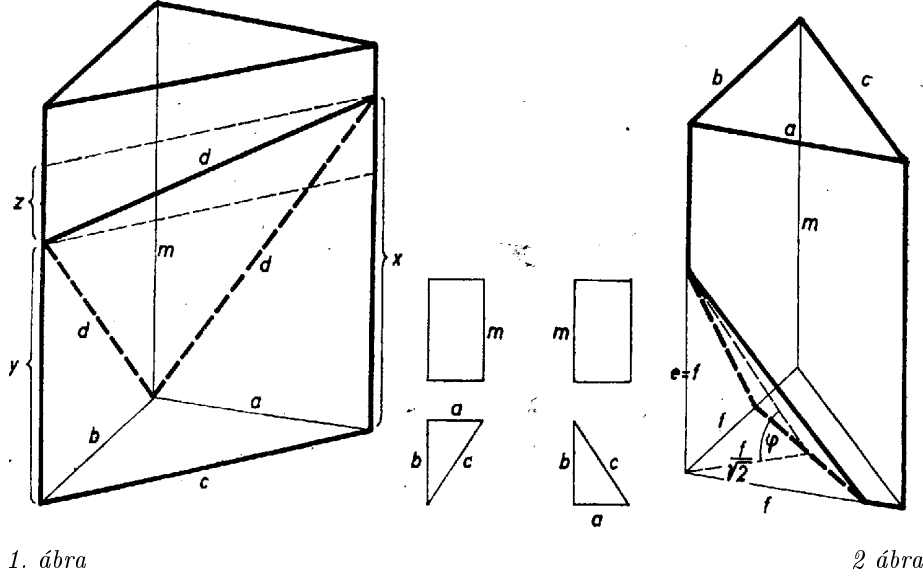


I. megoldás. Háromszögben metszik a hasábot az oldaléleket metsző síkok és az egy csúcsot lemetsző síkok. Keressünk először az első típusba tartozó síkot, egyelőre tetszés szerinti a, b, c alapélű hasábra, ahol $a \leq b \leq c$. Legyen a kimetszett H egyenlő oldalú háromszög oldala d . Így az a, b, c szélességű oldallapon levő metszetoldal végpontjainak magasságkülönbsége rendre

$$(1) \quad \sqrt{d^2 - a^2} = x, \quad \sqrt{d^2 - b^2} = y, \quad \sqrt{d^2 - c^2} = z,$$

és ezekre $x \geq y \geq z (\geq 0)$.



1. ábra

2. ábra

Ennélfogva (1. ábra):

$$(2) \quad x = y + z,$$

hiszen H alsó és felső csúcsának magasságkülönbsége a legnagyobb, és ennyit emelkedünk akkor is, ha a közbülső magasságú csúcson át, H -nak további két oldalán megyünk föl a felső csúcsba. (1) szerint

$$(3) \quad a^2 + x^2 = b^2 + y^2 = c^2 + z^2 \quad (= d^2).$$

A szélső kifejezésekből (2) alapján

$$a^2 + (y + z)^2 = c^2 + z^2, \quad z = \frac{c^2 - a^2}{2y} - \frac{y}{2}$$

(föltehetjük ugyanis, hogy $y \neq 0$, mert különben $z = 0$ és (2)-ből $x = 0$, ami csak $a = b = c$ esetén következik be, és ekkor a keresett sík nyilvánvalóan párhuzamos kell, hogy legyen az alappal). Ekkor (3)-ból, a szokásos rendezési lépésekkel y^2 -re kapunk másodfokú egyenletet:

$$b^2 + y^2 = c^2 + \frac{(c^2 - a^2)^2}{4y^2} - \frac{c^2 - a^2}{2} + \frac{y^2}{4},$$

$$3y^4 - 2(a^2 + c^2 - 2b^2)y^2 - (c^2 - a^2)^2 = 0.$$

Az y^2 -re adódó két gyök szorzata $-(c^2 - a^2)^2/3 < 0$, tehát a kisebb gyök negatív, ezt természetesen figyelmen kívül hagyjuk.

A diszkrimináns $1/4$ része:

$$(a^2 + c^2 - 2b^2)^2 + 3(c^2 - a^2)^2 = 4(a^4 + b^4 + c^4) - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Jelöljük a jobb oldal első zárójelbeli kifejezését S_4 -gyel, a másodikbelit S_{22} -vel, így

$$y^2 = \frac{1}{3} \left(a^2 + c^2 - 2b^2 + 2\sqrt{S_4 - S_{22}} \right) \quad \text{és}$$

$$d^2 = y^2 + b^2 = \frac{1}{3} \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{S_4 - S_{22}} \right).$$

Ilyen metszet természetesen csak akkor lehetséges, ha a hasáb m magassága legalább x , azaz

$$m^2 \geq \frac{1}{3} (b^2 + c^2 - 2a^2 + 2\sqrt{S_4 - S_{22}}).$$

II. H oldalának ismeretében kifejezhetjük területét, ekkor pedig S és az alapsík φ hajlásszögének koszinuszát egy ismert tétel szerint megadja az alapídom és H területének hányadosa:

$$\cos \varphi = t : \frac{d^2 \sqrt{3}}{4},$$

ahol t kiszámítható pl. Heron képlete alapján.

III. Az adott numerikus esetben az alapídom derékszögű háromszög. Így $t = 6$, másrészt $d^2 = (50 + 2\sqrt{193})/3$ és

$$\cos \varphi = \frac{25\sqrt{3} - \sqrt{579}}{36} = 0,5344,$$

$$\varphi = 57,7^\circ.$$

IV. A hasáb alapídomát is átmetsző síkmetszet kérdését csak az adott numerikus esetben tekintjük. H két oldala a hasáb két oldallapjából egy-egy derékszögű háromszöget metsz le, és ezek egybevágók, hiszen az oldalélen levő e befogójuk közös, átfogójuk pedig d (2. ábra). Így a másik befogók, a lemetszett alapcsúcsba befutó alapélek részei, szintén egyenlők – legyen a hosszuk f –, tehát síkunk az alapháromszögből egyenlő szárú háromszöget metsz le. Ebből már adódik, hogy a lemetszett csúcs csak a derékszög csúcsa lehet. Ugyanis a két hegyesszög kisebb 60° -nál ($\cos \beta = 0,6 > 0,5 = \cos 60^\circ$), így az egyenlő szárú háromszög alapja nem lehet d , hiszen kisebb f -nél, ez pedig kisebb, mint d .

Ekkor S síkunk a két oldallapból egybevágó derékszögű háromszöget metsz le, és a fentebbi megfontolás szerint az alapból lemetszett háromszög is egybevágó a másik kettővel. Így S mindhárom élből ugyanakkora f szakaszt metsz le, az alapból lemetszett háromszög szimmetriatengelye $f/\sqrt{2}$, tehát a φ' hajlásszögre

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{f}{f/\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \varphi' = 54,74^\circ.$$

A metsző síknak nem lehet metszetszakasza a hasáb alaplaján is, fedőlapján is, mert így a metszetnek legalább 4 csúcsa lenne. Ezért további lehetőség nincs.

Andor Csaba (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

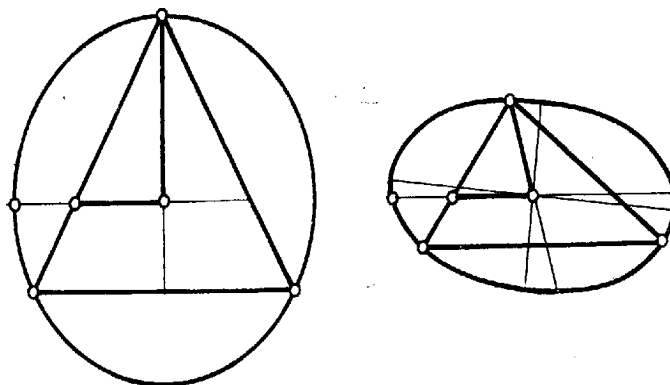
Megjegyzés. *S. Lhuillier* francia matematikus (1750–1840) bebizonyította, hogy tetszés szerinti háromoldalú hasáb síkmetszetei között minden lehetséges háromszög-alak előfordul¹.

II. megoldás (csak az oldaléleket átmetsző sík esetére). Tekintsük H -nak k körülírt körét. k -nak az alapsíkon levő vetülete egy az alapháromszög köré írt ellipszis. Elég lenne ismerni ennek féltengelyeit – a szokásos jelöléssel a -t és b -t, ezekkel ugyanis $\cos \varphi = b/a$, mert a éppen k sugara, ti. az alapsíkkal párhuzamos sugár vetülete, b pedig – az ellipszis legrövidebb átmérőjének fele – annak a sugárnak a vetülete, amely a keresett φ -vel hajlik az alapsíkhoz.

a -t és b -t kiszámíthatjuk az 1502. feladat² eljárásával az ellipszis egy konjugált fél-átmérőpárjának r , r' hosszából és a köztük levő ψ szögből. Ilyen értékhármast ad k bármely merőleges sugárpárjának az alapsíkon levő vetülete. Vegyük egyiknek a H valamelyik csúcsához tartozó sugarat; ennek vetülete az alapháromszög megfelelő csúcsából induló súlyvonalnak a csúcs felé eső $2/3$ része. Ugyanis k középpontja a H -nak egyszersmind súlypontja, és ez a tulajdonság a vetületben is megmarad (mert az egy egyenesen levő szakaszok vetületeinek aránya egyenlő az eredeti szakaszok arányával, ezért az oldalfelező pont vetülete felezi a megfelelő oldalvetületét, és a súlyvonal harmadolópontjának vetülete harmadolja a súlyvonal vetületét). A H mondott sugarára merőleges sugár vetülete arra az egyenesre esik, amely átmegy az alapháromszög súlypontján és párhuzamos a kiszemelt csúcsával szemben levő oldallal, mert párhuzamos egyenesek vetületei párhuzamosak. A mondott sugár $\sqrt{3}$ -szor akkora, mint a H belsejében levő része. Ezért az alapon a megfelelő félátmérő is $\sqrt{3}$ -szor akkora, mint a mondott egyenesből a súlypont és a háromszög kerülete közé eső szakasz, vagyis az oldal $1/\sqrt{3}$ része, hiszen a háromszögbeli szakasz egyszerű számítás szerint az oldal $1/3$ része.

¹ Lásd pl. *H. Dörrie*: A diadalmas matematika, Száz híres probléma két évezred matematikai műveltségéből, Gondolat Kiadó, Budapest, 1965, 324. o.

² K. M. L. 35 (1967) 206. o.



3. ábra

A számpélda esetére szorítkozva induljunk ki H -nak abból a csúcsából, melynek vetülete az alapháromszög derékszögének csúcsa; így a súlyvonal fele az átfogónak és az ellipszis két konjugált félátmérője $r = c/3 = 5/3$, $r' = 5/\sqrt{3}$ és a köztük levő ψ hegyesszög 2-szer akkora, mint az alapháromszög kisebbik hegyes szöge: $\sin \psi/2 = 3/5$, $\cos \psi/2 = 4/5$, így $\sin \psi = 24/25$.

Most már az idézett feladat (3) képleteivel

$$\begin{aligned}\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \sin \psi} &= \frac{2}{3}\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}, \\ \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \psi} &= \frac{2}{3}\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}, \text{ és így} \\ \cos \varphi = \frac{b}{a} &= \frac{\sqrt{25 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}}{\sqrt{25 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{1}{24\sqrt{3}} \left(\sqrt{25 + 12\sqrt{3}} - \sqrt{25 - 12\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{25 - \sqrt{193}}{12\sqrt{3}},\end{aligned}$$

amit az I. megoldásban is találtunk.

Megjegyzés. A súlypontnak és a rajta átmenő szakasz végpontjának H -hoz való csatolása lényegében hasonló ahhoz, ahogyan az 1424. feladat ³ I. megoldásában és a hozzá fűzött megjegyzésekben a szabályos nyolcszöghöz kapcsoltunk hozzá további, a vetületben megszerkeszthető pontokat.

³K. M. L. 32 (1966) 212. o.