

I. Az adott kifejezés polinom-alakja 9-edfokú, állandó tagja nincs, mert $x = 0$ helyettesítéssel értéke 0. A követelmény teljesüléséhez x , x^2 és x^3 együtthatójának 0-nak kell lennie, azaz

$$3A - 1 = 0, \quad 3A^2 + 3B = 0, \quad A^3 + 6AB + 3C = 0.$$

Az első egyenletből $A = 1/3$, ezt a másodikba helyettesítve $B = -A^2 = -1/9$, és mindkettőt a harmadikba beírva $C = 5/81$. Viszont x^4 fellép, együtthatója $10/81$. Ekkor az (1) polinom

$$D(x) = \frac{10}{81}x^4 - \frac{2}{243}x^5 - \frac{8}{2187}x^6 + \frac{40}{6561}x^7 - \frac{25}{19683}x^8 + \frac{125}{531441}x^9.$$

II. $D(x)$ -ben az együtthatók abszolút értékének összege $75\,968/531\,441 < 76/531$, így, ha pl. $|x| < 1/2$, akkor $|D(x)|$ -re felső becslést kapunk, minden tagot az abszolút értékével helyettesítve, majd $|x|$ fellépő hatványai helyébe a náluk nagyobb $(1/2)^4$ -t írva. Eszerint, ha $|x| < 1/2$, akkor

$$|D(x)| < \frac{76}{531 \cdot 2^4} < \frac{5}{531} < \frac{1}{100}.$$

Így kis abszolút értékű x -ekre várhatóan jól használható a következő közelítő egyenlőség:

$$(2) \quad \sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3.$$

Kecskeméty Károly (Budapest, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. (2) bal oldalát A -val, jobb oldalát B -vel jelölve

$$B^3 - A^3 = \delta(x), \quad \text{ahol} \quad |\delta(x)| < \frac{x^4}{4},$$

így ha $|x| < 1/2$, akkor $B > 0$, $A > 1/2$ és

$$|A - B| = \frac{|A^3 - B^3|}{A^2 + AB + B^2} < \frac{|\delta(x)|}{A^2} < 4|\delta(x)| < x^4.$$

2. $x = 0,3$, $-0,3$, $0,9$ és $-0,9$ esetén (2) az $1,3$, $0,7$, $1,9$, $0,1$ szám köbgyökére rendre az

$$1,0917, \quad 0,8883, \quad 1,255, \quad 0,565$$

közelítő értéket adja, a táblázatból vett

$$1,092, \quad 0,8879, \quad 1,238, \quad 0,465$$

értékkel szemben. Az utóbbi két példa (kívül az $|x| < 1/2$ intervallumon) már nagyobb eltérést mutat.

Hunyadvári László (Budapest, Könyves Kálmán g. IV. o. t.)