

Legyen röviden $x + y + z = u$, és írjuk át az egyenleteket a következő alakba:

$$\begin{aligned}xyu + xzu &= 1170, \\xyu + yzu &= 1008, \\xzu + yzu &= 1458.\end{aligned}$$

Ez az xyu , xzu , yzu ismeretlenekre vonatkozóan elsőfokú egyenletrendszer; a három ismeretlen összege $(1170 + 1008 + 1458)/2 = 1818$, így

$$(2) \quad yzu = 1818 - 1170 = 648, \quad xyu = 360, \quad xzu = 810.$$

Az eredeti egyenletek szerint az itt fellépő tényezők egyike sem 0, ezért az első szorzatot az utóbbi kettővel osztva megkapjuk az eredeti ismeretlenek párjainak arányát:

$$\frac{z}{x} = \frac{648}{360} = \frac{9}{5}, \quad \frac{y}{x} = \frac{4}{5}, \quad z = \frac{9x}{5}, \quad y = \frac{4x}{5}.$$

Végül ezeket a kifejezéseket pl. az első egyenletbe helyettesítve

$$x \cdot \frac{13x}{5} \cdot \frac{18x}{5} = 1170, \quad x^3 = 125,$$

ennek egyetlen valós megoldása $x = 5$, és ebből $y = 4$, $z = 9$.

Mindig ekvivalens egyenletre térünk át, ezért a megoldás kielégíti (1)-et.

Andor Csaba (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Rácz Éva (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A jobb oldali állandókat rendre a , b , c -vel és összegüket $2s$ -sel jelölve hasonlóan

$$xyu = s - c, \quad xzu = s - b, \quad yzu = s - a,$$

$$y = \frac{s - a}{s - b} \cdot x, \quad z = \frac{s - a}{s - c} \cdot x,$$

$$\frac{(s - a)^2}{(s - b)(s - c)} \left(\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s - b} + \frac{1}{s - c} \right) x^3 = 1,$$

$$x = \frac{1}{s - a} \sqrt[3]{\frac{(s - a)^2(s - b)^2(s - c)^2}{ab + ac + bc - s^2}},$$

hacsak a , b , c egyike sem egyenlő a másik kettő összegével.