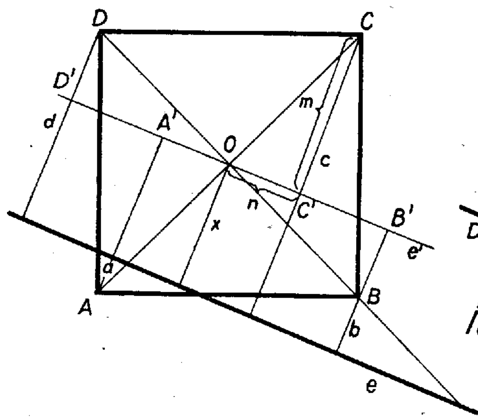
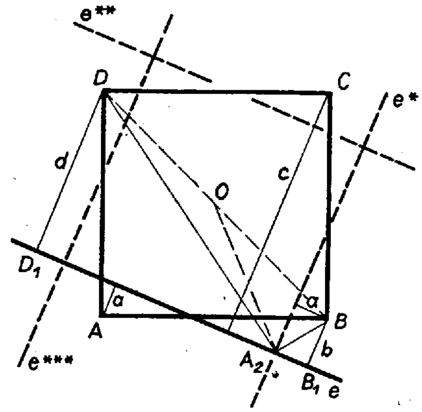
I. megoldás. Legyen a kérdéses négyzet $ABCD$, a többiektől elválasztott csúcs A, a csúcsok és az O középpont e-től mért távolsága rendre, a, b, c, d, x. A feladat feltevése szerint $ac = bd$. Föltehetjük, hogy $b \leqq d$, mert ezt, ha kell, a B, D betűk fölcserélésével elérhetjük. Így e a DB átlónak B-n túli meghoszszabbítását metszi, $b = d$ esetén pedig párhuzamos vele.



1. ábra



2. ábra

Húzzuk meg O-n át az e-vel párhuzamos e' egyenest, és legyen ezen a csúcsok vetülete rendre A', B', C', D'. $b < d$ esetén B az e'-nek azon a partján van, mint A, az OAA', OBB', OCC', ODD' derékszögű háromszögek egybevágók, mert átfogójuk $1/\sqrt{2}$ és hegyesszögeik egyenlők. Legyenek a befogóik m és n, ahol $m > n$. Ezekkel

$$a + x = AA' = CC' = c - x = m,$$
$$x - b = BB' = DD' = d - x = n,$$

így $\quad a = m - x,\ c = m + x,\ b = x - n,\ d = x + n,$

Ezeket a föltevésbe helyettesítve

$$m^2 - x^2 = x^2 - n^2, \qquad x^2 = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) = \frac{1}{4}, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Ha pedig $b = d$, akkor e' azonos a BD egyenessel, tehát $x = b = d$, $a + x = c - x = 1/\sqrt{2}$, innen $a = 1/\sqrt{2} - x$, $c = 1/\sqrt{2} + x$, és a föltevésből ismét $x = 1/2$.

Hegedűs András (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás. Forgassuk el az ábrát a négyzet O középpontja körül 90°-kal úgy, hogy A a B-be jusson. Legyen B és D vetülete e-n B_1, ill. D_1, e elforgatottjának, e^*-nak a metszéspontja e-vel A_2. Ekkor $A_2B_1 = a$, mert egyenlő A elforgatottjának, B-nek e^*-tól való távolságával. Hasonlóan $A_2D_1 = c$. A feltétel szerint $ac = bd$, így az A_2BB_1 és DA_2D_1 derékszögű háromszögek befogóinak aránya

$$\frac{A_2B_1}{B_1B} = \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{DD_1}{D_1A_2}.$$

Így a két háromszög hasonló. Mivel továbbá a megfelelő csúcsokon végighaladva a két háromszöget egyező irányban járjuk körül és megfelelő befogóik merőlegesek, így átfogóik is: $DA_2B\sphericalangle = 90°$. A DA_2B derékszögű háromszög OA_2 súlyvonala az átfogó felével, vagyis a négyzet átlójának a felével egyenlő.

Továbbforgatva az ábrát $90° - 90°$-kal, az e egyenes elforgatottjai egy O középpontú négyzetet zárnak be, melynek átlója a bizonyítottak szerint egyenlő hosszú az $ABCD$ négyzet átlójával, így a két négyzet egybevágó. És mivel középpontjuk közös, azért beírt körük is, vagyis e távolsága O-tól a négyzet oldalának fele.

III. megoldás. Helyezzünk koordináta–rendszert ábránkra, legyenek a csúcsok koordinátái $A(0,\,0)$, $B(1,\,0)$, $C(1,\,1)$, $D(0,\,1)$ és e egyenlete $y = mx + b$, ahol $0 < b < 1$, mert e elválasztja A-t D-től. A csúcsok e-től mért előjeles távolsága az ismert képlet felhasználásával rendre

$$\frac{-b}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \frac{-m-b}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \frac{1-m-b}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \frac{1-b}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Feltevésünk a távolságok abszolut értékére vonatkozik, ezért A távolságának -1-szeresét véve, a föltevés szerint, a közös nevezővel mindjárt szorozva

$$b(1 - m - b) = (m + b)(b - 1), \qquad \text{amiből}$$
$$b = \frac{1}{2}(1 - m) \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 1}.$$

Ezt helyettesítjük e egyenletébe és a távolság–képletet az $(1/2,\, 1/2)$ középpontra alkalmazzuk. A kívánt távolság:

$$x=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}(1-m)\mp\frac{1}{2}\sqrt{m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}.$$

Rácz Éva (Makó, József A. g. III. o. t.)
Munk Sándor (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.)