

I. Az u , v ismeretlen-párra nézve az egyenletrendszer elsőfokú, először ezeket fejezzük ki a p , q paraméter-párral. Feltesszük, hogy

$$(3) \quad p \neq 0, \quad q \neq 0, \quad p - q \neq 0 \quad \text{és} \quad p + q \neq 0,$$

azaz $|p| \neq |q|$, különben (2)-nek nincs értelme.

Osszuk (1)-et $p + q$ -val, szorozzuk (2)-t p -vel, adjuk össze a kapott egyenleteket, majd képezzük a bal és jobb oldal különbségét:

$$(4) \quad v \left(\frac{q}{p+q} + \frac{p}{p-q} \right) = 2(p-q) + \frac{p^2+q^2}{q},$$

$$\frac{v(p^2+2pq-q^2)}{p^2-q^2} = \frac{p^2+2pq-q^2}{q},$$

$$(5) \quad \left(\frac{v}{p^2-q^2} - \frac{1}{q} \right) (p^2-2pq-q^2) = 0.$$

Ez az egyenlet – pl. az (1)-gyel összekapcsolva – az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert alkot.

Ha mármost

$$(6) \quad p^2 + 2pq - q^2 \neq 0,$$

akkor (5)-ből

$$(7) \quad v = \frac{p^2 - q^2}{q},$$

folytatólag (1)-ből

$$(8) \quad u = \frac{p^2 - q^2}{p}$$

és (8), (7) a rendszer egyetlen megoldása.

Ha viszont a paraméterekre teljesül

$$(9) \quad p^2 + 2pq - q^2 = 0,$$

akkor (2) következménye az (1)-nek, hiszen (4) mindkét oldala 0, ezért minden az (1)-et kielégítő u , v értékpárra (2) is teljesül, végtelen sok megoldás van. Tetszés szerinti v -t választva a megoldás:

$$(10) \quad u = \frac{1}{p} [2(p^2 - q^2) - qv], \quad v.$$

(9) akkor teljesül, ha a paraméterek aránya

$$(11) \quad q/p = 1 + \sqrt{2}, \quad \text{vagy ha} \quad q/p = 1 - \sqrt{2},$$

ilyen esetben (3) is teljesül.

II. p -t és q -t tekintve ismeretleneknek, ismét fölteszük (3)-at, vagyis kizárunk minden olyan u , v paraméter-párt, amely a (3)-at nem teljesítő p , q értékpárra vezet. Az (1), (5) rendszer a (3) feltétel mellett a p , q ismeretlenekre is ekvivalens az (1), (2) rendszerrel. (5) teljesül, ha (7) és (9) közül legalább az egyik teljesül. (7)-ből és (1)-ből kaptuk (8)-at, ezek szerint

$$p^2 - q^2 = vq = up, \quad \text{ezért} \quad q = \frac{u}{v} \cdot p,$$

ezt beírva (8)-ba, majd onnét p kifejezését ide visszahelyettesítve

$$(12) \quad u = p - \frac{q^2}{p} = p \left(1 - \frac{u^2}{v^2} \right) = p \frac{v^2 - u^2}{v^2},$$

$$p = \frac{uv^2}{v^2 - u^2}, \quad q = \frac{u^2v}{v^2 - u^2}.$$

Ez megoldása a rendszernek, hacsak teljesül rá (3), azaz ha $u \neq 0$, $v \neq 0$ és $|u| \neq |v|$.

(9) teljesülése meghatározza az ismeretlenek (11) arányát, onnét q -t (1)-be helyettesítve, majd az adódó másodfokú egyenlet $p = 0$ gyökét mindjárt figyelmen kívül hagyva:

$$(13) \quad up + v(1 \pm \sqrt{2})p = -4p^2(1 \pm \sqrt{2}),$$

$$p = \frac{u + (1 \pm \sqrt{2})v}{-4(1 \pm \sqrt{2})} = \frac{1}{4} [(1 \mp \sqrt{2})u - v],$$

végül (11) alapján

$$(14) \quad q = \frac{1}{4}[-u - (1 \pm \sqrt{2})v].$$

Ez megoldása a rendszernek, ha teljesül rá (3). A kizárt $p = 0$, $q = 0$, $p - q = 0$, $p + q = 0$ esetek mindegyike erre vezet: $v \neq u(1 \mp \sqrt{2})$. (Ez azt jelenti, hogy $u = v = 0$ is ki van zárva.)

III. Összefoglalva, adott p , q értékpár esetén egyértelműen

$$u = \frac{p^2 - q^2}{p}, \quad v = \frac{p^2 - q^2}{q}, \quad \text{ha} \quad pq(p^2 - q^2) \neq 0 \quad \text{és} \quad q \neq (1 \pm \sqrt{2})p.$$

Ha pedig $q = (1 \pm \sqrt{2})p$ és $pq(p^2 - q^2) \neq 0$, akkor tetszés szerinti

$$u = \frac{1}{p}[2(p^2 - q^2) - qv], \quad v$$

kielégíti a rendszert, végtelen sok megoldás van.

Másrészt, adott u , v értékpár esetén egyértelműen

$$p = \frac{uv^2}{v^2 - u^2}, \quad q = \frac{u^2v}{v^2 - u^2}, \quad \text{ha} \quad uv(u^2 - v^2) \neq 0,$$

továbbá

$$p = \frac{1}{4}[(1 \mp \sqrt{2})u - v], \quad q = \frac{1}{4}[-u - (1 \pm \sqrt{2})v]$$

ha $v \neq u(1 \mp \sqrt{2})$. Vagyis általában 3 megoldás van; ha azonban v/u értéke ± 1 , vagy $1 \mp \sqrt{2}$, akkor 2 megoldás van, föltéve, hogy $uv \neq 0$. Ha u , v egyike, pl. $u = 0$, akkor

$$p = -\frac{v}{4}, \quad q = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{4}v$$

alakban ugyancsak 2 megoldást kapunk. $u = v = 0$ esetén nincs megoldása a rendszernek.

Fiala Tibor (Budapest, II. Rákóczi F. g. II. o. t.)

Szabados Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A p , q ismeretlen-párra az alábbiak szerint is megoldhatjuk a rendszert. (2)-ből, (1) figyelembevételével

$$\frac{(p+q)v - (p-q)u}{p^2 - q^2} = \frac{2(p+q)v - 2(p-q)u}{pu + qv} = \frac{p^2 + q^2}{pq},$$

beszorozva, 0-ra redukálva, alkalmas kiemelésekkel, végül gyöktényezőkre bontással (felhasználva (11)-et)

$$(15) \quad \begin{aligned} 2pq(qv - pu) + (p^2 - q^2)(qv - pu) &= 0, \\ (p^2 + 2pq - q^2)(qv - pu) &= 0, \\ [q - (1 + \sqrt{2})p][q - (1 - \sqrt{2})p](qv - pu) &= 0. \end{aligned}$$

Az egymás utáni tényezőket 0-val egyenlővé téve q -t kifejezhetjük p -vel, így p -t kiszámíthatjuk (1)-ből.

$q = (1 \pm \sqrt{2})p$ esetén, a $p = 0$ gyököket mindjárt figyelmen kívül hagyva

$$p = \frac{u + (1 \pm \sqrt{2})v}{-4(1 \pm \sqrt{2})} = \frac{1}{4}[(1 \mp \sqrt{2})u - v],$$

$q = pu/v$ esetén pedig hasonlóan (12)-t kapjuk.

(15) harmadik tényezőjében (3) miatt nem lehet $u/v = \pm 1$, ha pedig $u/v = 1 \pm \sqrt{2}$, akkor a harmadik tényező azonos az első kettő valamelyikével, innen nem kapunk újabb megoldást.