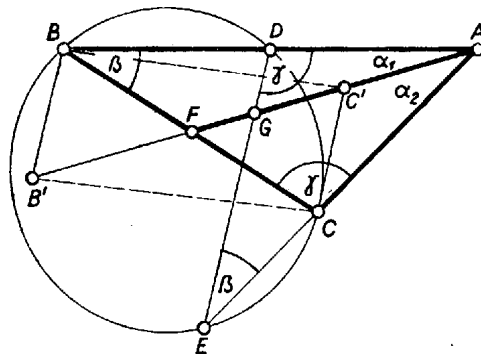
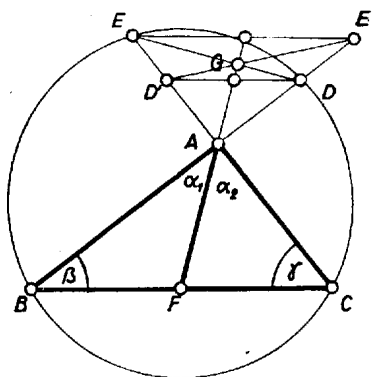


I. megoldás. Az ábra háromszögeiben szereplő közös, ill. egyenlő oldalak és közös, ill. egyenlő szögek reményt nyújtanak arra, hogy az összefüggésekben felhasznált fölösleges alkotórészek kiküszöbölésével célhoz érünk. – Az állítás értelmét veszti, ha a kör átmegy A -n, ezért ezt az esetet kizárjuk. Ekkor A, D, E különböző pontok és az ADE háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők, hiszen az AB, AC egyenespár a körnek két szelője. Legyen $\angle ABC = \angle AED = \beta$, $\angle ACB = \angle ADE = \gamma$, továbbá $\angle FAB = \alpha_1$, $\angle FAC = \alpha_2$, az utóbbiak rendre azonosak vagy csúcsszögek a GAB , ill. GAC szöggel aszerint, hogy A a körre nézve külső, ill. belső pont.



1. ábra



2. ábra

Fejezzük ki GD -t, GE -t a szinusz-tétel alapján az AGD , ill. AGE háromszögből és alakítsuk arányukat az alábbiak szerint:

$$(2) \quad \begin{aligned} GD : GE &= \frac{GA \sin \alpha_1}{\sin \gamma} : \frac{GA \sin \alpha_2}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} : \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \\ &= \frac{AC}{AB} : \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}. \end{aligned}$$

(Az arány tagjait szoroztuk $\sin \beta / GA \sin \alpha_1$ -gyel, majd a szinusz tételt alkalmaztuk az ABC háromszögre.) Hasonlóan az AFB és AFC , majd ismét az ABC háromszög alapján

$$\begin{aligned} FB : FC &= \frac{FA \sin \alpha_1}{\sin \beta} : \frac{FA \sin \alpha_2}{\sin \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} : \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \\ &= \frac{AB}{AC} : \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}. \end{aligned}$$

Mivel pedig $FB = FC$, azért

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{AB}{AC}.$$

Ezt (2) utolsó arányába helyettesítve és az arány tagjait egyaránt $AB \cdot AC$ -vel szorozva az (1) állítást kapjuk.

Bizonyításunk akkor is érvényes, ha a kör érinti p1. az AB egyenest, és így D helyén is B értendő, sőt akkor is, ha ugyanígy még E is egybeesik C -vel. Az utóbbi esetben azonban az állítás nyilvánvaló, mert az ABC háromszög egyenlő szárú, másrészt G azonos F -fel.

Horváth Sándor (Budapest, I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. Húzzunk párhuzamost DE -vel B -n és C -n át, és messék ezek AF -et a B' , ill. C' pontban. Ekkor a $GDA, B'BA$, a $GEA, C'CA$, valamint az ADE, ACB hasonló háromszög-párok

$$GD : GE = \frac{AD}{AB} \cdot BB' : \frac{AE}{AC} \cdot CC' = \frac{AD}{AE} : \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB} : \frac{AB}{AC} = AC^2 : AB^2,$$

ugyanis $BB'CC'$ paralelogramma, és így $BB' = CC'$.

Fischer Ágnes (Budapest, Móricz Zs. g. I. o. t.)

III. megoldás. Húzzunk párhuzamost BC -vel D -n és E -n át, és messe ez AC -t D' -ben, ill. AB -t E' -ben. Ekkor AF nyilvánvalóan felezi DD' -t és EE' -t, a $DD'EE'$ trapéz két párhuzamos oldalát, ezért átmegy az átlók metszéspontján is. A DE átló G -ben metszi AF -et, így G -n átmegy $D'E'$ is. Hasonló háromszögekből

$$\frac{GD}{GE} = \frac{DD'}{EE'} = \frac{AD'}{AE}.$$

Az ADE , ACB és $AD'D$ háromszögek hasonlóak, ebből

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{AD'}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

és ezek összeszorzásával

$$\frac{GD}{GE} = \frac{AD'}{AE} = \frac{AC^2}{AB^2}.$$

Göndőcs Ferenc (Kapuvár, II. sz. Ált. Isk., 8. o.t.)