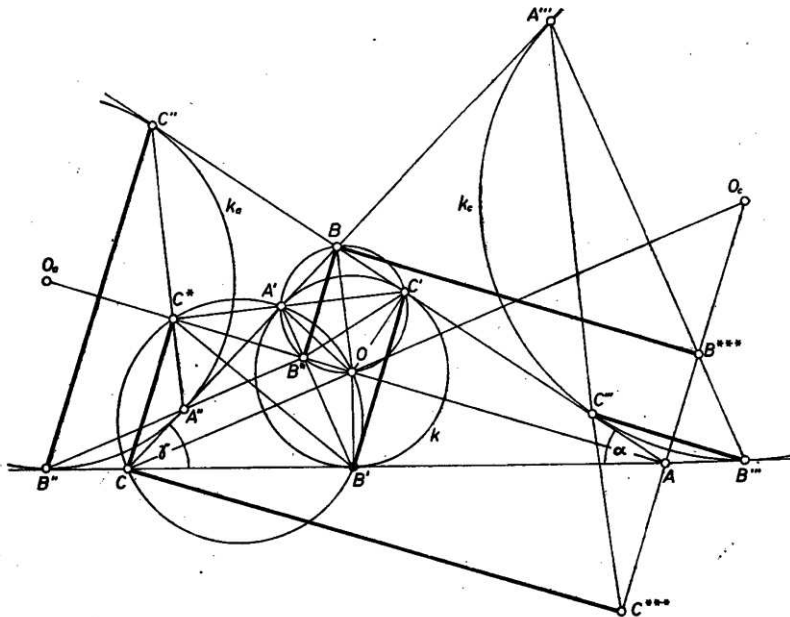


a) A szögfelező átmegy a beírt kör O középpontján és merőleges $B'C'$ -re ezért elég azt belátnunk, hogy BB^* is, CC^* is merőleges AO -ra.

Ha A' rajta van AO -n, akkor a háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$, AO a szimmetriatengely, és B^* , C^* azonos A' -vel, BB^* és CC^* azonos a BC egyenessel.

$AB \neq AC$ esetén válasszuk a betűzést úgy, hogy $AB < AC$ legyen, ekkor A' az AO -nak C' -t tartalmazó partján van, ezért C^* a háromszögön kívül adódik, B^* viszont a belsejében.



Az OB^* szakaszt A' -ből és C' -ből egyenlő szögben látjuk, ugyanis a szimmetria és az $OA'B'$ háromszög egyenlő szárú volta miatt

$$OC'B^* \sphericalangle = OB'B^* \sphericalangle = OA'B^* \sphericalangle,$$

eszerint A' , C' , O és B^* egy kör pontjai. Másrészt az első három ponton átmenő, egyértelműen meghatározott kör átmegy B -n is, mert $OA'B$ és $OC'B$ derékszögek, s így az $OA'BC'$ deltoid húrnégyszög, és e körben OB átmérő. Ezért a $BB^*O \sphericalangle$ derékszög, s ezt akartuk bizonyítani.

A $CC^*O \sphericalangle$ derékszög voltát lényegében ugyanígy bizonyítjuk, de figyelembe véve, hogy AO , azaz OC^* szétválasztja A' -t és B' -t. Az $OA'C^*B'$ négyszög A' -nél levő külső szögére:

$$OA'C' \sphericalangle = OC'A' \sphericalangle = OC'C^* \sphericalangle = OB'C^* \sphericalangle,$$

tehát a négyszög húrnégyszög, másrészt körülírt köre O , A' , B' miatt átmegy C -n, ezért $CC^*O \sphericalangle = CA'O \sphericalangle$, derékszög.

b) Tekintsük az ABC háromszögnek azt a k_a külső érintő körét, amely a BC oldalt a háromszöget nem tartalmazó partján, az A'' pontban érinti, középpontja legyen O_a . Legyen az AC , AB félegyenesen levő érintési pontja B'' , C'' és mossa az AO_a egyenest $A''B''$ a B'' pontban, $A''C''$ a C'' -ban. Érvényes a feladat állításának megfelelője: $B''C'' \parallel BB'' \parallel CC''$, és ez a fentiekhez hasonlóan bizonyítható. S mivel eszerint pl. B'' is, B^* is a B csúcs vetülete az A -ból induló belső szögfelezőn, e két pont azonos. (Az is fennáll, hogy B^* -ban $A'B'$ és $A''B''$ merőlegesen metszi egymást, hiszen merőlegesek a C -beli belső, ill. külső szögfelezőre.)

c) Legyen végül az AB oldalt kívülről érintő k_c , kör középpontja O_c , érintési pontja a BC , CA , AB egyenesen rendre A''' , B''' , C''' , továbbá $A'''B'''$ -nek és $A'''C'''$ -nek az AO_c külső szögfelezőn levő metszéspontja B''' , ill. C''' , ekkor hasonlóan bizonyítható, hogy $B'''C''' \parallel BB''' \parallel CC'''$.

Szenes Katalin (Budapest, I. István Gimnázium)

Takács László (Sopron, Széchenyi I. Gimnázium)

Megjegyzés. Az állítás háromszögek hasonlósága alapján is bizonyítható, ezt B^* -ra vonatkozóan vázoljuk, a szokásos jelöléseket használjuk. $CA'B'$ egyenlő szárú háromszög, ezért $AB'B^* \sphericalangle = 90^\circ + \gamma/2$, $B'AB^* \sphericalangle = \alpha/2$, így $AB^*B' \sphericalangle = \beta/2 = ABO \sphericalangle$, tehát $AB^*B' \triangle \sim ABO \triangle$. Innen

$$\frac{AB^*}{AB} = \frac{AB'}{AO},$$

emiatt az A -nál egyenlő szöggel bíró AB^*B és $AB'O$ háromszögek is hasonlóak, az utóbbiban B' -nél derékszög van, tehát az $AB^*B \sphericalangle$ is derékszög.