

(2) bal és jobb oldala különbségének, valamint a (3) és (4) két oldalán álló különbségeknek közös alakja

$$(5) \quad f(u) - f(v) = \frac{pu + q}{ru + s} - \frac{pv + q}{rv + s} = \frac{(rq - ps)(v - u)}{(ru + s)(rv + s)} = \frac{(rq - ps)(v - u)}{r^2 \left(u + \frac{s}{r}\right) \left(v + \frac{s}{r}\right)}$$

(ugyanis I.-nek és II.-nek csak $r \neq 0$ esetén van értelme).

(I) nevezője

$$rx + s = r \left(x + \frac{s}{r}\right),$$

zárójelbeli tényezője az I.-ben és II. -ben szereplő $-s/r$ helyen eltűnik, előtte negatív, utána pozitív. S mivel $i = 1, 2$ értéke mellett

$$\text{az I. esetben } x_i - \varepsilon < x_i < -s/r, \text{ a II. esetben } -s/r < x_i < x_i + \varepsilon,$$

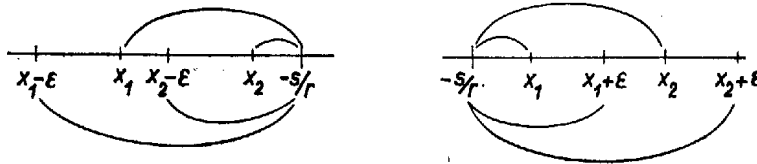
azért (5) nevezőjében a két zárójelbeli tényező mindegyik u, v számpárunk esetében egyenlő előjelű, tehát szorzatuk mindig pozitív. Ugyanez áll (5) számlálójára is – ennél fogva (5) mindig pozitív –, ugyanis a feltevés folytán $rq - ps > 0$, továbbá mindig $v - u > 0$, hiszen (2) esetében $u = x_1, v = x_2$, és mindig áll $x_2 - x_1 > 0$, (3) és (4) esetében pedig mindig $v - u = \varepsilon$. – Ezzel (2)-t máris bebizonyítottuk.

(3) és (4) bizonyításához – mivel két oldaluk (5) szerinti átalakításában a számláló közös és pozitív – csak a nevezők változó része közti

$$(3a) \quad \left(x_1 - \varepsilon + \frac{s}{r}\right) \left(x_1 + \frac{s}{r}\right) > \left(x_2 - \varepsilon + \frac{s}{r}\right) \left(x_2 + \frac{s}{r}\right),$$

$$(4a) \quad \left(x_1 + \frac{s}{r}\right) \left(x_1 + \varepsilon + \frac{s}{r}\right) < \left(x_2 + \frac{s}{r}\right) \left(x_2 + \varepsilon + \frac{s}{r}\right)$$

egyenlőtlenséget kell belátnunk. Ezek abból adódnak, hogy a tényezők abszolút értéke rendre a számvonal $x_1 - \varepsilon, x_1, x_2 - \varepsilon, x_2$, ill. $x_1, x_1 + \varepsilon, x_2, x_2 + \varepsilon$ abszcisszájú pontja és minden esetben a $-s/r$ pont közti távolság, és a feltevések folytán az I. esetben a (3a) bal oldalán, a II. esetben pedig a (4a) jobb oldalán álló 2–2 távolság rendre nagyobb, mint a másik oldalon álló megfelelő távolság (1. ábra). – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

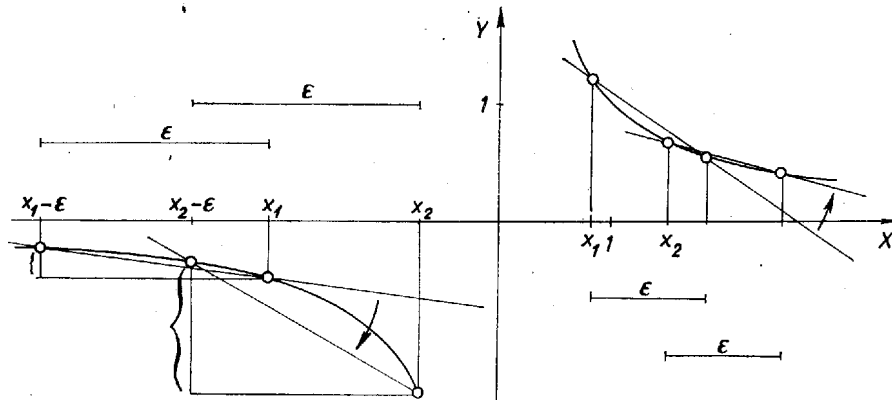


1. ábra

Kas Péter (Budapest, Szinyei Merse P. g. IV. o. t.)

Pap Márta (Budapest, Kölcsey F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Szemléljük a bebizonyított állításokat a $p = s = 0, q = r = 1$ eset példáján, a jól ismert $f(x) = 1/x$ függvényen. Ekkor (2) szerint (1) az $x < 0$ és $x > 0$ értelmezési tartomány mindkét összefüggő részében külön-külön csökkenő.



2. ábra

(3) és (4) e részek két-két egyenlő, ti. ε hosszúságú intervallumában bekövetkezett csökkenéseket hasonlítják össze, mindig a nagyobb függvényértékekből a kisebbet vonva ki. Az I. esetben x_2 , a II.-ban x_1 van közelebb az $x = 0$ szakadási helyhez, és (3) és (4) azt fejezi ki, hogy a mondott csökkenés a szakadási helyhez közelebb eső ε -intervallumban nagyobb.

(3)-at és (4)-et ε -nal osztva az egyenlőtlenségek iránya változatlan marad, és azt kapjuk, hogy a görbe egyenlő vetületű húrjainak meredeksége csökken, míg a szakadási helyhez balról közeledünk, és nő, miután e helyet átléptük.