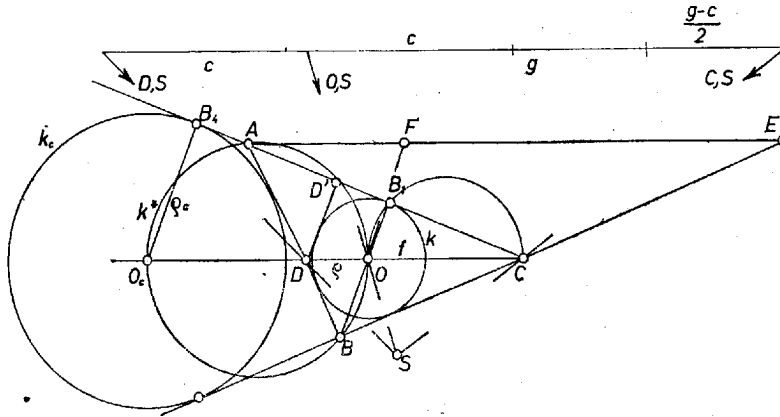


I. megoldás. I. Legyen az előírásoknak megfelelő ABC háromszögben az AB oldal, a C -ből kiinduló belső szögfelezőnek az AB egyenesig terjedő CD szakasza, valamint a CA és CB oldalak összege rendre egyenlő az adott c , f és $g = a + b$ szakasszal.

A CD szakaszon kijelölhető a háromszögbe beírt k kör O középpontja és meghatározható e kör sugara is. Fordítsuk rá CA -t C körül BC meghosszabbítására és legyen A új helyzete E , így $BE = g$, másrészt $\angle CEA = \angle ACB = 2\angle BCD$, ezért $AE \parallel DC$ (1. ábra).



1. ábra

Az ABC szög belső szögfelezője CD -t O -ban metszi, AE -n levő pontja legyen F . Ekkor az előzők és a szögfelező osztásaránya alapján

$$(1) \quad CO : OD = EF : FA = EB : AB = g : c.$$

Ismeretes másrészt, hogy k -nak AC -n levő B_1 érintési pontjára nézve

$$(2) \quad CB_1 = \frac{a + b - c}{2} = \frac{g - c}{2}.$$

Ezek alapján a háromszöget az alábbiak szerint szerkeszthetjük. A $CD = f$ szakaszt $g : c$ arányban kettéosztjuk az O ponttal; a CO rész fölötti Thalész-kört metsszük a C körüli, $(g - c)/2$ sugarú körrel B_1 -ben. Ekkor az O körüli, OB_1 sugarú kör lesz k , ennek C -ből húzott érintője és D -ből húzott egyik érintője rendre a CA , CB , ill. AB oldalegyenes. (Az utóbbi érintő tetszés szerint választható – amennyiben D -ből 2 érintő húzható –, mert a 2 érintő egymás tükörképe CD -re.)

A kapott háromszögben CD felezi az ACB szöget, másrészt az oldalak hosszára vonatkozóan (1), ill. (2) alapján

$$(AC + CB) : AB = CO : OD = g : c, \\ \frac{(AC + CB) - AB}{2} = \frac{g - c}{2},$$

ezekből pedig egyszerű számítás szerint $AC + CB = g$ és $AB = c$.

A szerkesztés végrehajtásának nyilvánvaló első feltétele $g > c$. A B_1 pont létrejön és k valódi kör, ha $CB_1 < CO$; továbbá D -ből lehet érintőt húzni a kapott k -hoz, ha $OD \geq OB_1$, azaz

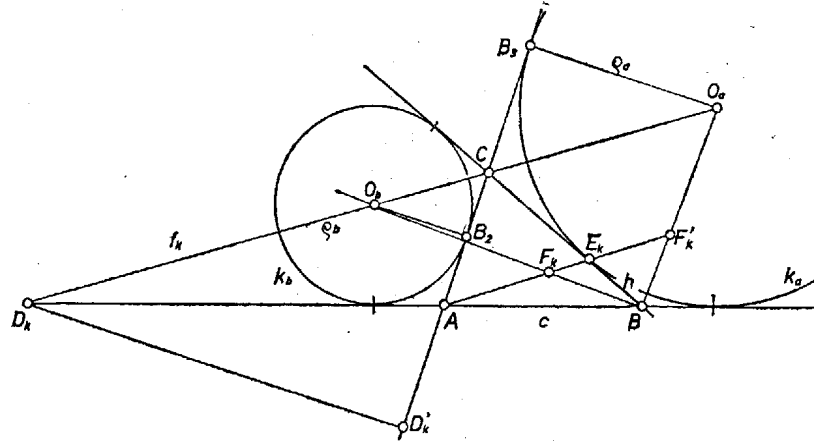
$$\frac{g - c}{2} < f \cdot \frac{g}{g + c}, \quad f \cdot \frac{c}{g + c} \geq \sqrt{\frac{f^2 g^2}{(g + c)^2} - \frac{(g - c)^2}{4}}.$$

Ezeket f -re megoldva és összefoglalva

$$\frac{g^2 - c^2}{2g} < f \leq \frac{\sqrt{g^2 - c^2}}{2}.$$

Ha f és a talált felső korlát között egyenlőség áll, akkor k átmegegyezik CD -vel, és egyenlő szárú háromszöget kapunk.

II. A C -ből húzott külső szögfelező akkor és csak akkor metszi az AB egyenest egy D_k pontban, ha $a \neq b$. Legyen ekkor $CD_k = f_k$ és $a - b = h > 0$, így D_k a BA oldal A -n túli meghosszabbításán van és a CD_k szakaszon van rajta a háromszög AC oldalához hozzáírt k_b külső érintő kör O_b középpontja. A háromszög a c , f_k és h adatokból a fentiekhez hasonlóan szerkeszthető. Fordítsuk rá CA -t C körül a CB félegyenes CE_k szakaszába, és messzük a BO_b (belső) szögfelezővel az AE_k szakaszt F_k -ban (2. ábra).



2. ábra

Így $AE_k \parallel CD_k$ és $BAE_k \triangle \sim BD_k C \triangle$, továbbá

$$(3) \quad CO_b : O_b D_k = E_k F_k : F_k A = E_k B : AB = h : c.$$

Másrészt, k_b -nek a CA szakaszon levő B_2 érintési pontjára nézve

$$CB_2 = \frac{b + c - a}{2} = \frac{c - (a - b)}{2} = \frac{c - h}{2}.$$

Ezek alapján a fentiekhez hasonlóan megszerkesztjük a CD_k szakaszon O_b -t, a CO_b szakasz fölötti Thalész-kör és a C körüli $(c-h)/2$ sugarú kör metszéseként B_2 -t, O_b körül $O_b B_2$ sugárral k_b -t, és ekkor az ABC háromszög oldalegyeneseit mint a k_b -hez C -ből húzott mindkét és a D_k -ből húzott egyik érintőt kapjuk.

A szerkesztés helyessége a fentihez hasonló számítással bizonyítható.

A szerkesztés végrehajtható, ha $h < c$ és $CB_2 < CO_b$. Az utóbbi teljesülése esetén (3) és $c > h$ alapján

$$O_b D_k > O_b C > O_b B_2,$$

tehát ha k_b létrejött, akkor D_k -ből meghúzható hozzá az érintő.

Göndöcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn.) dolgozatából, kiegészítéssel

Megjegyzések. 1. A II. adathármas esetében célhoz érünk a BC oldalhoz hozzáírt k_a külső érintő kör fölhasználásával is. Ennek O_a középpontja a CD_k szakasz C -n túli meghosszabbításán és az ABE_k szög BF'_k külső szögfelezőjén van, és $CO_a : O_a D_k = h : c$, másrészt a kör AC -n levő B_3 érintési pontjára $CB_3 = s - b = (a - b + c)/2 = (c + h)/2$.

2. Hasonlóan az I. adathármas esetében az AB oldalhoz hozzáírt k_c kör (CD meghosszabbításán levő) O_c középpontjára és AC -n levő B_4 érintési pontjára $CO_c : O_c D = g : c$ és $CB_4 = (g + c)/2$, ezek alapján a fentiekhez hasonlóan végezhetjük a szerkesztést.

3. Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy a háromszög oldalegyeneseit érintő körök O és O_c , ill. O_a , O_b középpontjai közül az előbbi, ill. az utóbbi párt egyidejűen használjuk fel. Ezt csak az I. adathármas esetére mutatjuk be. Az $AD : DB = AC : CB$ aránypárból fölcseréléssel, majd az 1. ábra BDC és BAE hasonló háromszögei alapján

$$AD : AC = BD : BC = BA : BE = c : g.$$

Eszerint A is, B is rajta van a D , C alappontokkal és a $c : g$ aránnyal meghatározott k^* Apollóniosz-körön. Láttuk másrészt, hogy O és O_c e körnek a CD egyenesen levő pontjai, tehát az OO_c szakasz a kör átmérője. Ennélfogva a CD szakasz fölvétele, O és O_c kijelölése és k^* megrajzolása után ebbe c hosszúságú és D -n átmenő húrt kell illeszteniünk.

Siklósi István (Budapest, Berzsényi D. Gimn.)

4. A fenti k , k_c körpárnak C a külső, D pedig a belső hasonlósági pontja (mert centrálisukat az AB közös belső érintő D -ben metszi), így

$$DO : DO_c = CO : CO_c,$$

mert mindkét arány egyenlő a körök sugarainak $\varrho : \varrho_c$ arányával. E szakaszokat a CA egyenesre vetítve, a vetületek aránya ugyancsak egyenlő, és az utóbbi kettő – mint már láttuk – kifejezhető c -vel és g -vel:

$$(4) \quad D'B_1 : D'B_4 = CB_1 : CB_4 = \frac{g - c}{2} : \frac{g + c}{2},$$

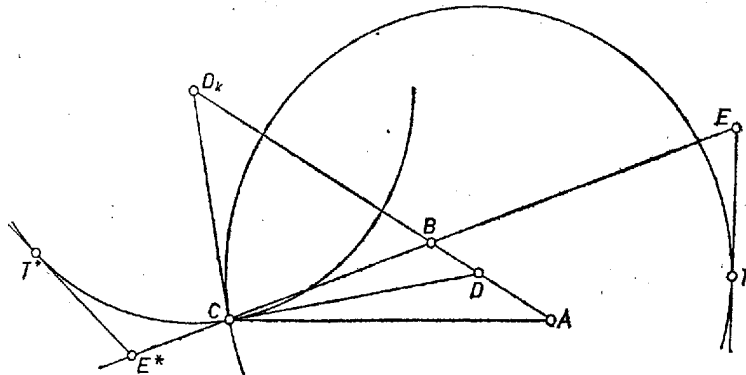
ahol D' a D pont vetülete (1. ábra).

Ezek alapján a C csúcs és a CA félegyenese helyzetét felvéve, ezen B_1 és B_4 , továbbá, (4) alapján D' kijelölhető. Ekkor a D' -ben CA -ra emelt merőlegesből a C körüli, f sugarú körívvel kimetszhetjük D -t, CA -nak CD -re való tükörképe a CB egyenes, B_1 alapján megkaphatjuk O -t és k -t (vagy B_4 alapján O_c -t és k_c -t), és ennek D -ből húzott érintője az AB oldal egyenese.

A bizonyítást és a diszkussziót a fentiekhez hasonlóan végezheti el az olvasó.

f_k és $a - b = h$ esetére D_k -nak CA -n levő vetületére hasonlóan $D'_k B_2 : D'_k B_3 = CB_2 : CB_3 = (c - h) : (c + h)$.

II. megoldás (vázlat). Alapszerkesztésre vezethetjük vissza feladatunk mindkét részét az 1438. feladatban¹ bebizonyított – ill. csak kimondott – tétel felhasználásával. Eszerint a D középpontú, f sugarú (ill. a D_k -val és f_k -val meghatározott) körhöz tetszés szerinti pontjában húzott érintőre fölmérjük $AB = c$ szakaszt, majd ennek E (ill. E^*) végpontja körüli g (ill. h) sugarú körrel metsszük az előbbi kört C -ben. Ekkor $DCE \sphericalangle = ACB \sphericalangle / 2$, (ill. $D_k C E^* \sphericalangle = 90^\circ - ACB \sphericalangle / 2$), tehát ismerjük a keresett háromszög C -beli szögét, innen kiinduló oldalainak összegét (különbségét) és a szemben fekvő oldalt (3. ábra).



1. ábra

Lakatos László (Budapest, Százados úti Gimn.)

¹K. M. L. 33 (1966) 208. o. (a mostani feladat kitűzését tartalmazó számban): Az ABC háromszög C -ből kiinduló szögfelezőjének az AB oldallal való D metszéspontja körül DC sugárral kört írunk, másrészt a CB oldalt B -n túl meghosszabbítjuk a $BE = CA$ szakasszal. Bizonyítandó, hogy ekkor az E -ből a körhöz húzott érintő hossza egyenlő AB -vel. Hasonlóan a C -nél levő külső szög felezőjének AB -n levő D_k pontja körüli, $D_k C$ sugarú körhöz a B -től C felé fölmért $BE^* = CA$ szakasz E^* végpontjából húzott érintő hossza szintén AB .