

(1) bal oldala azonos a következő kifejezéssel: ¹

$$(2) \quad \begin{aligned} & 24(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \\ & = 24x^3 - 24x^2(x_1+x_2+x_3) + 24x(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) - 24x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

mert a kettő különbsége legfeljebb másodfokú polinom, és eltűnik az x_1 , x_2 és x_3 helyeken, s így csak azonosan 0 lehet. Ennélfogva az x -et nem tartalmazó tagok is egyenlők, ebből

$$(3) \quad -24x_1x_2x_3 = -24x_3 = -60, \quad \text{ezért} \quad x_3 = 5/2.$$

Mostmár az x^2 -et tartalmazó tagok egyenlőségéből ²

$$-24x^2(x_1 + x_2 + x_3) = -10x^2, \quad x_1 + x_2 = \frac{10}{24} - \frac{5}{2} = -\frac{25}{12}.$$

Ezek szerint x_1 és x_2 a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$(4) \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x_2 + \frac{25}{12}x + 1 = 0,$$

amit megoldva (1) gyökei $x_1 = -3/4$, $x_2 = -4/3$, $x_3 = 5/2$. Az első kettő valóban egymás reciproka.

Nagy László (Esztergom, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. (4) bal oldalához jutunk úgy is, hogy (1) bal oldalát osztjuk a (3)-ból kapott gyökhöz tartozó gyöktényezőknek és x^3 együtthatójának szorzatával, $24(x - x_3) = 24x - 60$ -nal.

II. megoldás. (1) bal oldalának gyöktényezős alakja

$$(5) \quad 24(x-x_1)\left(x-\frac{1}{x_1}\right)(x-x_3).$$

és itt az első két gyöktényező szorzata $x + ux + 1$ alakú, ahol $u = -x_1 - 1/x_1$. Az u értékét meghatározhatjuk abból, hogy $x^2 + ux + 1$ osztója (1) bal oldalának, tehát az osztási maradék 0, az x tetszés szerinti értéke esetében. Mármint

$$\frac{\begin{array}{ccc} (24x^3 - & 10x^2 & -101x \\ \pm 24x^3 \pm & 24ux^2 & \pm 24x \end{array}}{\begin{array}{ccc} -(24u+10)x^2 & -125x & -60 \\ \mp(24u+10)x^2 & \mp(24u^2+10u)x & \mp(24u+10) \end{array}} = \frac{-60}{(24u^2+10u-125)x+(24u-50)} \quad (x^2+ux+1)=24x-(24u+10)$$

A maradék akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha u olyan érték, amelyre

$$24u^2 + 10u - 125 = 0 \quad \text{és} \quad 24u - 50 = 0.$$

Az utóbbi szerint csak $u = 25/12$ jön szóba, és ez az első egyenletet is kielégíti.

Ezzel ismét (4)-re jutottunk. Másrészt az osztás hányadosa (5) szerint $24(x - x_3) = 24x - 24x_3$, ezért

$$x_3 = \frac{-(24u + 10)}{-24} = \frac{50 + 10}{24} = \frac{5}{2}.$$

III. megoldás. (1) egyik gyöke sem 0, mert $x = 0$ esetén a bal oldal értéke -60 ; így mindhárom gyök reciproka létezik. Keressük azt az egyenletet, melynek gyökei $1/x_1, 1/x_2, 1/x_3$. Feltevésünk szerint $i = 1, 2, 3$ esetén

$$24x_i^3 - 10x_i^2 - 101x_i - 60 = 0.$$

Ez $x_i \neq 0$ miatt így is írható:

$$-60(1/x_i)^3 - 101(1/x_i)^2 - 10(1/x_i) + 24 = 0,$$

így a keresett egyenlet

$$(6) \quad -60x^3 - 101x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Mivel jelölésünk szerint $1/x_1 = x_2$ és $1/x_2 = x_1$, azért (1)-nek és (6)-nak két gyöke közös, és ugyanez áll a belőlük adódó

$$(1') \quad x^3 - \frac{10}{24}x^2 - \frac{101}{24}x - \frac{5}{2} = 0 \quad \text{és}$$

$$(6') \quad x^3 + \frac{101}{60}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{2}{5} = 0$$

¹Lásd e tárgykörhöz: *Surányi János*: Polinomok azonossága, K. M. L. 23 (1961/11) 103–105. o.

²Az elsőfokú tagok együtthatóinak összehasonlításából ugyanez adódik.

egyenletekre. Ezek gyöktényezős alakja

$$(1'') \quad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0, \quad \text{ill.}$$

$$(6'') \quad (x - x_2)(x - x_1) \left(x - \frac{1}{x_3} \right) = 0.$$

A közös gyökök gyökei a két bal oldal különbségének, vagyis a

$$-\frac{21}{10}x^2 - \frac{35}{8}x - \frac{21}{10} = -\frac{21}{10} \left(x^2 + \frac{25}{12}x + 1 \right) = 0$$

egyenletnek is, amivel lényegében ismét (4)-re jutottunk. Másrészt a két gyöktényezős alak, (1'') és (6'') különbségét képezve az

$$(x - x_1)(x - x_2) \left(-x_3 + \frac{1}{x_3} \right) = 0$$

alakra jutunk, amit az előbbivel összehasonlítva kapjuk, hogy x_3 az

$$\frac{1}{x_3} - x_3 = -\frac{21}{10}$$

egyenlet egyik gyöke, vagyis az $5/2$ és $2/5$ értékek egyike. Behelyettesítéssel adódik, hogy $x_3 = 5/2$ elégíti ki (1)-et.

Zöldy Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)