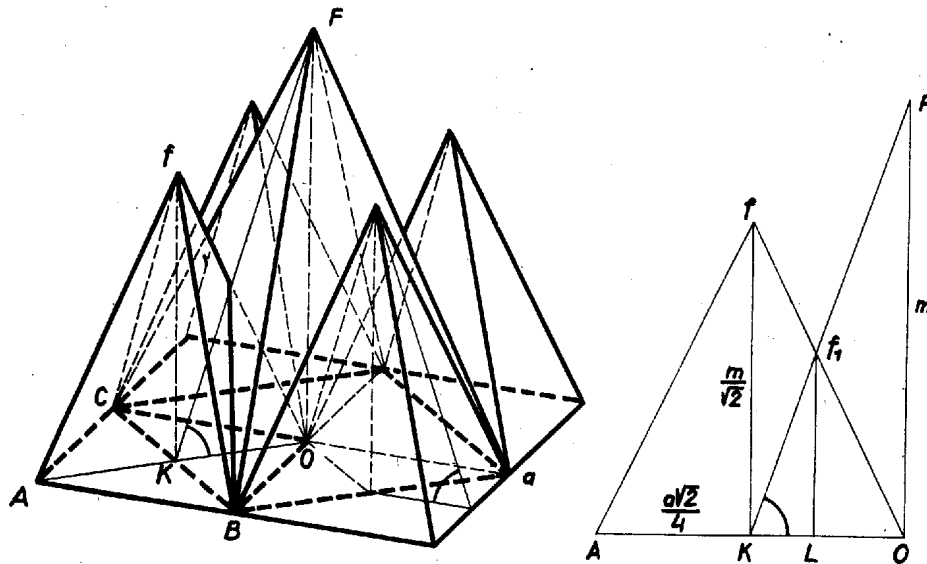


A keresett térfogat a négy kis gúla és a nagy gúla térfogatának összegénél annnyival kevesebb, amennyi a nagy gúla és a kis gúlák közös részének térfogata. Nyilvánvaló, hogy az alakzat szimmetrikus N oldalainak és átlóinak felező merőleges síkjára, így a négy kis gúla térfogata egyenlő, ugyanígy a 4 közös rész térfogata is.



Legyen N oldala a , ekkor a nagy gúla alapéle $BC = a/\sqrt{2}$, a kis gúláé $AB = a/2$, vagyis amannál $\sqrt{2}$ -ször kisebb. Ugyanez az arány a két gúla magassága között, a nagy gúlát $OF = m$ -mel jelölve a kis gúla magassága $Kf = m/\sqrt{2}$. Ugyanis mindkettőt metszve egyik alapélük felező merőleges síkjával, a metszetek hasonló egyenlő szárú háromszögek, mert az alapon levő szögük a feltevés szerinti hajlásszög, és a metszetháromszög alapja és magassága egyenlő az illető gúla alapélével, magasságával.

A nagy és kis gúla közös része háromoldalú gúla, OBC alapháromszögének területe a kis gúla alapterületének felével egyenlő; felső f_1 csúcsát a kis gúlának az N középpontjába befutó fO oldaléléből metszi ki a nagy gúla BCF oldallapjának FK szimmetriatengelye.

Az f_1 csúcs f_1L magasságát az AOF síkmetszetben keletkezett f_1OL és fOK , valamint f_1KL és FKO hasonló derékszögű háromszög-párokból és az $OL + LK = OK$ egyenlőségből számítjuk:

$$OL = OK \cdot \frac{f_1L}{fK}, \quad LK = OK \cdot \frac{f_1L}{FO}, \quad f_1L \left(\frac{1}{fK} + \frac{1}{FO} \right) = 1,$$

$$f_1L = \frac{fK \cdot FO}{fK + FO} = \frac{m}{\sqrt{2} + 1} = m(\sqrt{2} - 1).$$

Eszerint az $OBCf_1$ közös rész V_k , majd az egész alakzat V térfogata:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} m(\sqrt{2} - 1),$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} m + \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{m}{\sqrt{2}} - 4V_k = \frac{a^2 m}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) = \frac{a^2 m}{3},$$

éppen 2-szerese a nagy gúla térfogatának, más szóval annyi, mint egy N alapú és FO magasságú gúla térfogata.

Horváth Sándor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)