

Válasszuk az oldalak betűzését úgy, hogy $a \geq b \geq c$ álljon. Ekkor a szögekre $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

I. $\gamma < 90^\circ$, ezért a γ szög akkor a legkisebb, ha a

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{4(s-a)(s-b)}{4ab} = \frac{[c-(a-b)][c+(a-b)]}{(a+b)^2 - (a-b)^2}$$

kifejezés értéke a lehető legkisebb. A számláló tényezői pozitívak, így legkisebb lehetséges értékük 1. Ez be is következik, ha $c = 1$ és $a = b$. A nevező legnagyobb lehetséges értéke adódik, ha a és b közös értéke 10. Így $\sin \gamma/2 = 1/20 = 0,05$, $\gamma \approx 5,73^\circ$ a legkisebb előforduló szög.

II. α legnagyobb értékének meghatározásában a következő összefüggésből indulunk ki:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = \frac{[a+(c-b)] \cdot [a+(b-c)]}{(b+c+a)(b+c-a)} = \\ &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{a^2 - v^2}{u^2 - a^2} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2} - 1, \end{aligned}$$

ahol $u = b + c$, $v = b - c$. Eszerint u és v egyenlő párosságú egész számok és $u > v$.

Rögzített a és u esetén a kifejezés akkor a legnagyobb, ha v értéke a lehető legkisebb, vagyis $v = 0$, ha u páros, és $v = 1$, ha u páratlan. Az első esetben

$$\frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{u}\right)^2},$$

és ez akkor legnagyobb, ha a/u legnagyobb. Ehhez – megengedve u változását –, u -nak legkisebbnek kell lennie. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a < u$, így u legkisebb lehetséges értéke páros a esetén $u = a + 2$, páratlan a esetén $u = a + 1$. – Páros a esetén

$$\frac{a}{u} = \frac{a}{a+2} = 1 - \frac{2}{a+2}.$$

Legnagyobb értékét $a = 10$ mellett kapjuk: $10/12$, páratlan a esetén hasonlóan $a/(a+1)$ legnagyobb értéke $9/10$. Ez nagyobb $10/12$ -nél, tehát ha u páros, akkor $\operatorname{tg}^2 \alpha/2$ legnagyobb értékét az $a = 9$, $u = 10$, $v = 0$, $b = c = 5$ értékrendszer adja, ekkor $\operatorname{tg}^2 \alpha/2 = 81/19$. – Ha pedig u páratlan és $v = 1$, akkor

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - 1}{u^2 - a^2}$$

úgy ad legnagyobb eredményt, ha u a legkisebb, azaz páros a esetén $u = a + 1$ mellett. Ekkor

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - 1}{2a + 1} = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2a + 1},$$

ez a kifejezés a növekedésével monoton nő, legnagyobb szóba jövő értéke $a = 10$ mellett $\operatorname{tg}^2 \alpha/2 = 99/21$. Páratlan a esetén viszont $u = a + 2$, és

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - 1}{4(a + 1)} = \frac{a - 1}{4},$$

ami szintén növekvő, de még $a = 9$ esetén is kisebb a fenténél.

Minthogy pedig $99/21 > 81/19$, azért $\operatorname{tg}^2 \alpha/2$ értéke és egyben α értéke az $a = 10$, $u = 11$, $v = 1$, $b = 6$, $c = 5$ esetben a legnagyobb, ekkor $\alpha_{\max} \approx 130,5^\circ$.

Faragó Tibor (Budapest, Bláthy O. Erősár. Ip. Tech., IV. o. t.)