

I. megoldás. Minden a feltevés szerinti x -re (1) két oldala értelmezve van. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén az állítás helyes, ugyanis a $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ azonosság felhasználásával

$$(2) \quad \frac{1}{\sin 2x} + \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x$$

Tegyük fel, hogy az állítás helyes az n -nek valamilyen j értékére, és hogy a feltételek teljesülnek $n = j + 1$ -re. Ekkor teljesülnek $n = j$ -re is, így fennáll

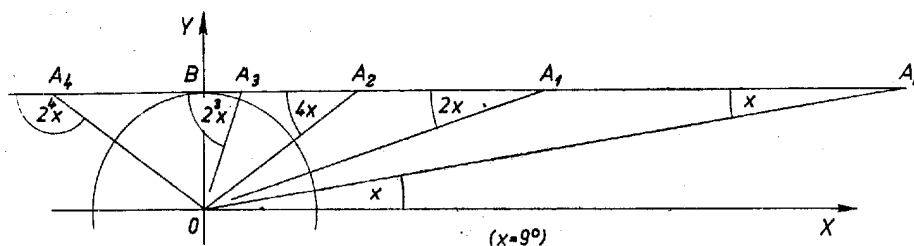
$$(3) \quad \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 \cdot x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^j \cdot x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^j \cdot x.$$

Írjunk továbbá (2) mindkét oldalán x helyén $2^j \cdot x$ -et:

$$(4) \quad \frac{1}{\sin 2^{j+1} \cdot x} = \operatorname{ctg} 2^j \cdot x - \operatorname{ctg} 2^{j+1} \cdot x.$$

Itt feltevésünk szerint mind a két oldalnak van értelme. Mármost (3) és (4) összeadásával (1)-et kapjuk, n helyén $j + 1$ -gyel, tehát (1) érvényessége bármely természetes szám esetéről átöröklődik az 1-gyel nagyobb szám esetére. – Ezzel az állítást igazoltuk.

Sugár László (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)



II. megoldás, a $0 < x < \pi/2^n$ értékekre szorítkozva. Mérjük föl az $x, 2x, 4x, \dots, 2^n \cdot x$ forgásszögeket a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az O origó közös csúcsuk, az X -tengely pozitív fele közös száruk legyen. Messe az $y = 1$ egyenes (az origó körüli egységkör érintője a $B(0; 1)$ pontban) a szögek másik szárát rendre az $A_0, A_1, \dots, A_n$ pontban. Ekkor, mint ismeretes, az A_i pont ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) abszcisszája $\operatorname{ctg} 2^i \cdot x$ -et ábrázolja, így (1) jobb oldala az $A_0 A_n$ szakasz hosszát jelenti, egyszersmind az $O A_n A_0$ háromszög területének kétszeresét, és az $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ pontok ebben a sorrendben rajta vannak az $A_0 A_n$ szakaszon.

Az $O A_i$ szakasz hossza viszont az $O A_i B$ derékszögű háromszögből $1/\sin 2^i \cdot x$, az $O A_i$ és $O A_{i+1}$ félegyenesek közti szög $2^{i+1} \cdot x - 2^i \cdot x = 2^i x$, így az $O A_i A_{i+1}$ háromszög területének kétszerese

$$O A_i \cdot O A_{i+1} \cdot \sin A_i O A_{i+1} = \frac{1}{\sin 2^i \cdot x} \cdot \frac{1}{\sin 2^{i+1} \cdot x} \cdot \sin 2^i \cdot x = \frac{1}{\sin 2^{i+1} \cdot x}.$$

Eszerint (1) bal oldalának tagjai rendre az $O A_0 A_1, O A_1 A_2, \dots, O A_{n-1} A_n$ háromszög területének kétszeresét jelentik, összegük pedig a feldarabolt $O A_0 A_n$ háromszög területének kétszerese.

Ezzel (1)-et a tett korlátozás esetére bebizonyítottuk.

Gács Pál (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)