

**I. megoldás.** I. Minden az adott  $a, b, c$  helyeken a 0 értéket felvevő harmadfokú függvény a következő alakra hozható:

$$(1) \quad y = k(x-a)(x-b)(x-c) = k(x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc),$$

ahol  $k$  alkalmas, 0-tól különböző állandó. Keressük egyszerűség kedvéért a függvényt ábrázoló görbe érintőjét egyelőre a tetszés szerinti  $x_1$  abszcisszájú  $P_1$  pontban, azután alkalmazzuk majd az eredményt a kérdéses  $x_1 = (a+b)/2$  esetre.  $P_1$  ordinátája

$$y_1 = k(x_1^3 - (a+b+c)x_1^2 + (ab+bc+ca)x_1 - abc).$$

Legyen a görbe egy más,  $P_2$  pontjának abszcisszája  $x_2$ , ekkor ordinátája

$$y_2 = k(x_2^3 - (a+b+c)x_2^2 + (ab+bc+ca)x_2 - abc),$$

és a  $P_1P_2$  szelő iránytangense  $m_{12} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ . Forgassuk a szelőt  $P_1$  körül úgy, hogy  $x_2$  mind kevésbé térjen el  $x_1$ -től, ekkor a  $P_2$  pont közeledik a görbén  $P_1$ -hez és a szelő határhelyzete az érintő lesz, arra az esetre, ha  $P_2$  egybeesik  $P_1$ -gyel.  $m_{12}$  számlálójának  $k$ -adrésze alkalmas kiemelésekkel így alakítható:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{k} &= (x_2^3 - x_1^3) - (a+b+c)(x_2^2 - x_1^2) + (ab+bc+ca)(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - (a+b+c)(x_2 + x_1) + ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Ennélfogva mindenesetre

$$m_{12} = k(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - (a+b+c)(x_2 + x_1) + ab+bc+ca),$$

a mondott határhelyzetben, mivel  $x_2 = x_1$ ,

$$m_1 = k(3x_1^2 - 2(a+b+c)x_1 + ab+bc+ca),$$

és ekkor az érintő egyenlete

$$(2) \quad y - y_1 = m_1(x - x_1).$$

Könnyű belátni, hogy  $m_1$  zárójeles kifejezése három szorzat összegévé alakítható:

$$(3) \quad m_1 = k((x_1 - a)(x_1 - b) + (x_1 - b)(x_1 - c) + (x_1 - c)(x_1 - a)).$$

Ezzel beláttuk, hogy az  $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$  kifejezés  $x_2 = x_1$  esetén is meghatározza az (érintőbe átmenő) szelő meredekségét.

II. Írjuk most (3)-ban és (2)-ben  $x_1, y_1$  helyére az előírt, ill. (1)-ből adódó

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad y_1 = k\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right)$$

értékeket, így megkapjuk a kérdéses érintő egyenletét, és azt kell belátnunk, hogy ezt az  $x = c, y = 0$  pont kielégíti, vagyis hogy fennáll

$$(4) \quad -y_1 = m_1(c - x_1).$$

A jobb oldal első tényezője (3) alapján így alakítható:

$$m_1 = k(x_1 - a)(x_1 - b) + k(x_1 - c)(2x_1 - a - b) = k\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right),$$

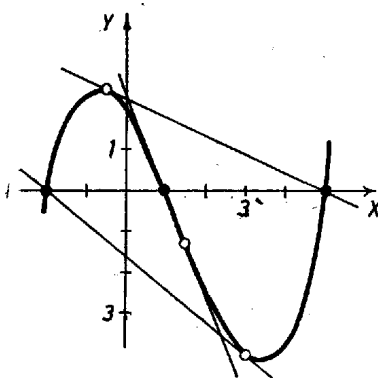
hiszen a második tag 0; vagyis  $m_1$  egyenlő  $y_1$  szorzat alakja első három tényezőjének szorzatával. (4) második tényezője pedig a behelyettesítéssel egyenlővé válik  $y_1$  utolsó tényezőjének  $(-1)$ -szeresével, tehát (4) valóban teljesül. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Balogh József* (Hatvan, Bajza J. G.)  
*Varga Gabriella* (Szombathely, Savaria G.)

*Megjegyzés.* Az  $a, b, c$  abszcisszák nagyságviszonyáról semmit sem tételeztünk fel, ennél fogva pl. az;

$$y = 0,2(x+2)(x-1)(x-5)$$

függvény esetében  $c$  szerepét a  $-2, +1, +5$  zérushelyek mindegyike felveheti, vagyis e függvény grafikonjához három az állításnak megfelelő érintő húzható.

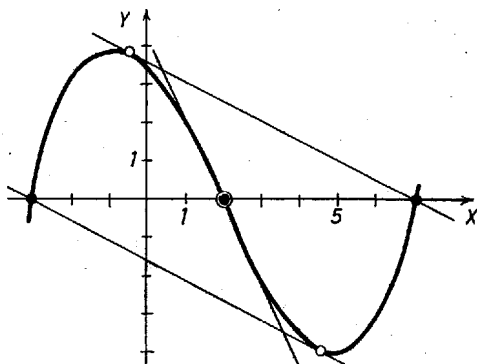


$$y = 0,2(x+2)(x-1)(x-5)$$

Azt sem használtuk fel, hogy  $a, b, c$  különbözők, sem azt, hogy  $(a+b)/2$  és  $c$  különbözők. Pl. az

$$y = (x+3)(x-2)(x-7)/12$$

függvény esetében a középső zérushely éppen egyenlő a legkisebb és legnagyobb zérushely számtani közepével.



$$y = (x+3)(x-2)(x-7)/12$$

**II. megoldás.** Az állítás következő megfordítását bizonyítjuk: az  $y = k(x-a)(x-b)(x-c)$  függvény  $g$  grafikonjának  $C(c, 0)$  pontjából a görbéhez húzott érintő érintési pontjának abszcisszája  $(a+b)/2$ . A  $C$  ponton átmenő tetszés szerinti  $e$  egyenes egyenlete  $y = m(x-c)$ , ahol  $m$  tetszés szerinti állandó.  $g$  és  $e$  további két metszéspontjának abszcisszája  $a$

$$k(x-a)(x-b)(x-c) = m(x-c)$$

egyenletből adódik. Az érdektelen  $C$  metszéspontra vezető  $x-c$  tényezőt mindkét oldalon elhagyva:

$$k(x-a)(x-b) = m, \quad \text{azaz} \quad kx^2 - k(a+b)x + kab - m = 0.$$

A két metszéspont  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájának számtani közepe a gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján mindenesetre

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \frac{k(a+b)}{k} = \frac{a+b}{2},$$

ez tehát akkor is áll, ha  $e$ -nek azt a helyzetét vesszük, amelyben  $x_1 = x_2$ , vagyis amikor  $e$  éppen érintő. Ekkor  $(x_1 + x_2)/2 = x_1 = (a+b)/2$ , ezt akartuk bizonyítani.

Ebből azért következik a feladat állítása, mert a harmadfokú függvény grafikonjának minden egyes pontjában egyetlen érintője van. Láttuk ugyanis az I. megoldás (3) kifejezésében, hogy  $P_1$ -nek  $x_1$  abszcisszája egyértelműen meghatározta az érintő iránytangensét.

Juhász Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. G.)

*Megjegyzés.* Itt az érintő definíciójából csak ennyit használtunk ki: olyan egyenes, melynek a görbével való metszéspontjai közül kettő egybeesik.

**III. megoldás** (vázlat). Messe az  $y = px + q$  egyenes az  $y = k(x-a)(x-b)(x-c)$  függvény grafikonját az  $x_1, x_2, x_3$  abszcisszájú pontokban. Az abszcisszákat  $a$

$$(5) \quad k(x-a)(x-b)(x-c) - (px+q) = 0$$

egyenlet gyökei, így összegük a harmadfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggés alapján egyenlő az  $x^2$  és  $x^3$  előtt álló együtthatók hányadosának  $(-1)$ -szeresével. Ez (5) polinommal alakítása alapján

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c.$$

Ha most azt az egyenest vesszük, amelyre  $x_1 = x_2 = (a + b)/2$ , akkor  $x_3 = c$ . És fordítva, ha  $x_3 = c$ , és  $x_1 = x_2$ , akkor  $x_1 = (a + b)/2$ .

*Havas János* (Budapest, Berzsenyi D. G.)