

Legyen a számtani sorozat differenciája d , a mértani sorozat kvociense q , mindkettő 1-nél nagyobb természetes szám. Így a c) követelmény szerint

$$(1) \quad \begin{aligned} 4 + 6d &= 1 + q + q^2 + q^3, \\ d &= \frac{q(q^2 + q + 1) - 3}{6}. \end{aligned}$$

Ez a figyelembe jövő q értékek esetén mindenesetre pozitív, továbbá egész, ha a számláló osztható 2-vel is, 3-mal is. Az első feltétel teljesül, ha q páratlan szám, mert akkor a zárójelben is páratlan szám áll. A második egyrészt akkor, ha q , másrészt ha $q^2 + q + 1 = (q - 1)^2 + 3q$, azaz ha $(q - 1)^2$ osztható 3-mal. Az első feltétel a $q = 3M$, a második a $q = 3M + 1$ alakú számokra teljesül, ahol M egész szám, hiszen 3 prím volta miatt egy négyzetszám akkor és csak akkor osztható vele, ha az alapszám is osztható.

A két feltételt egybevetve a számláló 6-tal való osztásakor a maradéknak páratlannak kell lennie, másrészt a 0 és 3, valamint 1 és 4 számok valamelyikének. Mindkét feltételnek csak az 1 és 3 maradék felel meg, a feladatnak eleget tesz minden 1-nél nagyobb, $q = 6k + 3$ és $6k + 1$ alakú természetes szám, és a belőle (1) alapján kiszámítható d .

A legkisebb négy megoldás:

$$q = 3, d = 6 \text{ esetén: } 1 + 7 + 13 + 19 = 1 + 3 + 9 + 27 = 40;$$

$$q = 7, d = 66 \text{ esetén: } 1 + 67 + 133 + 199 = 1 + 7 + 49 + 343 = 400;$$

$$q = 9, d = 136 \text{ esetén: } 1 + 137 + 273 + 409 = 1 + 9 + 81 + 729 = 820;$$

$$q = 13, d = 396 \text{ esetén: } 1 + 397 + 793 + 1189 = 1 + 13 + 169 + 2197 = 2380.$$

Juhász Ágnes (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)