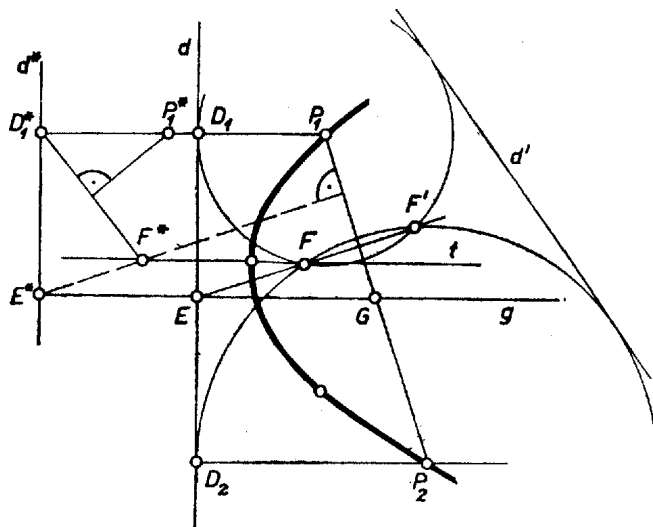


I. megoldás. *a)* és *b)* eset. A parabola definíciója így is fogalmazható: a parabola azon körök középpontjaiból áll, amelyek átmennek az F fókuszon és érintik a d vezéregyenesest. Adott P_1 és P_2 pontjaink körül megrajzolhatjuk ezt a kört, akár F , akár d adott a felsorolt három elem közül (1. ábra), és ekkor az *a)* esetben d lehetséges helyzeteit a két kör külső közös érintői adják, a *b)* esetben pedig F lehetséges helyzeteit a két kör közös pontjai, végül a tengely mindig az F -en átmenő, d -re merőleges egyenes lesz.



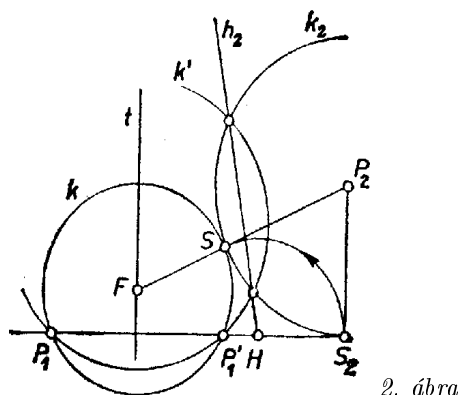
1. ábra

Az *a)* esetben csak akkor nincs megoldás, ha a két kör F -ben éppen érinti egymást, és egyikük benne van a másikban, azaz ha F, P_1, P_2 ebben a sorrendben egy egyenesen van, hiszen P_1P_2 húrja a parabolának és F csak belső pont lehet. Minden más helyzet esetén nyilvánvalóan 2 közös érintője van a köröknek.

A *b)* esetben már eleve látható, hogy nincs megoldás, ha d szétválasztja P_1 -et és P_2 -t, vagy ha pl. P_1 a d -n van. Egyébként 2 megoldás van vagy nincs megoldás aszerint, hogy a két körnek van 2 különböző közös pontja, vagy nincs közös pontjuk. Külső érintkezésük esetén 1 megoldás van; belső érintkezésük esetén viszont nincs megoldás, mert így egyetlen közös pontjuk d -n volna, és a fókusz a vezéregyenesre esne; ez a helyzet akkor állna be, ha $P_1P_2 \perp d$, a P_1P_2 húr párhuzamos lenne a tengellyel, ez pedig lehetetlen.

c) eset. Feltehetjük, hogy P_1 és P_2 a t tengely két partján van, és pedig P_2 távolabb van t -től, mint P_1 , mert a parabola szimmetrikus t -re, a pontok P'_1, P'_2 tükörképe is a parabolán van, így P_1P_2 nem lehet sem párhuzamos t -vel, sem merőleges rá.

Amennyiben P_1 rajta van t -n, akkor ez a parabola C csúcsa, és az itt t -re állított c merőleges a csúcserintő, ennek ismert tulajdonságai alapján könnyen célba jutunk: P_2 -nek c -n levő vetületét Q_2 -vel, a P_1Q_2 szakasz felezőpontját R_2 -vel jelölve a P_2R_2 -re R_2 -ben állított merőleges t -ből az F -et, a P_2Q_2 egyenesből pedig a d -vel való metszéspontját metszi ki. (Ezután P_1 nem lehet a t -n.)



2. ábra

P_2 -nek a $P_1P'_1$ egyenesen levő S_2 vetületéről való távolsága megadja, mennyivel van távolabb d -től P_2 , mint P_1 (2. ábra, könnyű ugyanis belátni, hogy a tengelytől távolabbi P_2 pont d -től is távolabb van, mint P_1), így a definíció alapján P_2 és P_1 vezérsugarainak különbségét is megadja: $P_2F - P_1F = P_2S_2$. Eszerint az F körül FP_1 sugárral írt k kör kívülről érinti a P_2 körül P_2S_2 sugárral írt k_2 kört. Ezzel F megszerkesztését visszavezettük a P_1, P'_1 pontokon átmenő és a k_2 kört kívülről érintő k kör megszerkesztésére. Ezt az 1406. feladat I. megoldásában¹ láttuk. Itt P_1 ,

¹Lásd K. M. L. 33 (1966) 55. o.

P'_1 a k_2 -re nézve külső pontok (egyik sem azonos S_2 -vel), ezért k csak kívülről érintheti k_2 -t. A szerkesztést az ábra mutatja. Ez valamivel egyszerűbb az idézett helyen leírtánál, hiszen a H -ból k_2 -höz húzható érintő hossza már ismeretes: a HS_2 szakasz. (A várható második k kör elfajult a $P_1P'_1$ egyenessé.) Ezután d -t az a) eset szerint szerkeszthetjük. (Az olvasóra hagyjuk annak bizonyítását, hogy az adódó közös érintők egyike merőleges t -re.)

Bod Judit (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Szabó Klára (Esztergom, Dobó Katalin g. III. o. t.)

Megjegyzés. Többen a szerkesztést így vélték befejezni: „megszerkesztem azt a hiperbolát, melynek fókuszai P_1 , P_2 , és valós tengelyének hossza a P_2S_2 szakasz, ez metszi ki t -ből F -et.” – Ez helytelen. Az adatokból a hiperbolának tetszés szerinti – de csak véges – számú pontja szerkeszthető meg. Éppen fordítva, ha valahol hiperbola és egyenes metszéspontjának megszerkesztése a feladat, ezt a fenti vagy más efféle szerkesztéssel szokás végrehajtani.

A további megoldásokban csak a c) esettel foglalkozunk, és ebben is az adott pontokat t -n kívülieknek vesszük

II. megoldás. Messe a P_1 és P_2 körüli, F -en átmenő körök metszéspontjait összekötő egyenes (ill. érintkezésük esetén a közös belső érintőjük) d -t az E pontban (1. ábra). E felezi a köröknek d -n levő D_1 , D_2 érintési pontjai közötti szakaszt, hiszen $ED_1^2 = EF \cdot EF' = ED_2^2$. Eszerint E rajta van a P_1P_2 szakasz G felezőpontján átmenő, és a t -vel párhuzamos g egyenesen is. Másrészt EF merőleges P_1P_2 -re, mint a körök centrálisára, továbbá FD_1 felező merőlegese átmege P_1 -en.

Ezek alapján F -et és E -t a következőképpen szerkeszthetjük. A P_1 -en át t -vel párhuzamosan húzott egyenes tetszés szerinti D_1^* pontjában állított merőleges messe g -t E^* -ban, az E^* -ból P_1P_2 -re bocsátott merőleges t -t F^* -ban, $D_1^*F^*$ felező merőlegese $D_1^*P_1$ -et P_1^* -ban. F^* -ból t -re és E^* -ból g -re $P_1^*P_1$ -gyel egyenlő és egyirányú szakaszt mérve, megkapjuk F -et és E -t, végül az E -ből t -re állított merőleges adja d -t.

Joó István (Pannonhalma, Bencés g. III. o. t.)

Megjegyzés. A fentiekben a következő tételt találtuk: a parabola bármely húrjára a fókuszról állított merőleges átmege a húr felezőpontjának a vezéregyenesen levő vetületén.

III. megoldás. Megszerkesztjük a parabola C csúcsának helyzetét és p paraméterének hosszát. Ekkor C -től t -n mindkét irányba $p/2$ szakaszt fölmérve F -et, ill. d -nek tengelypontját kapjuk. (F az, amely közelebb van P_1 -hez.) A koordináta-geometria eljárásait használjuk, origónak (a még ismeretlen) C -t, X -tengelynek t -t vesszük, így a parabola egyenlete $y^2 = 2px$; P_i koordinátái legyenek (x_i, y_i) , $i = 1, 2$, ahol fentebbi megállapodásainkat fenntartva $x_2 > x_1 > 0$, és $y_2 > 0$. Így a P_1P_2 egyenes α irányszöge pozitív hegyes szög (3. ábra), és

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (y_2 - y_1) : \left(\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p} \right) = \frac{p}{(y_1 + y_2)/2}, \\ p &= \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Eszerint a P_1P_2 húr M felezőpontján át a húrra és a tengelyre állított merőlegesek közé a tengelyből p hosszúságú szakasz esik, hiszen a keletkező derékszögű háromszögben a két merőleges közti szög α , és a t -re merőleges befogó M ordinátája: $(y_1 + y_2)/2$ (ami > 0).

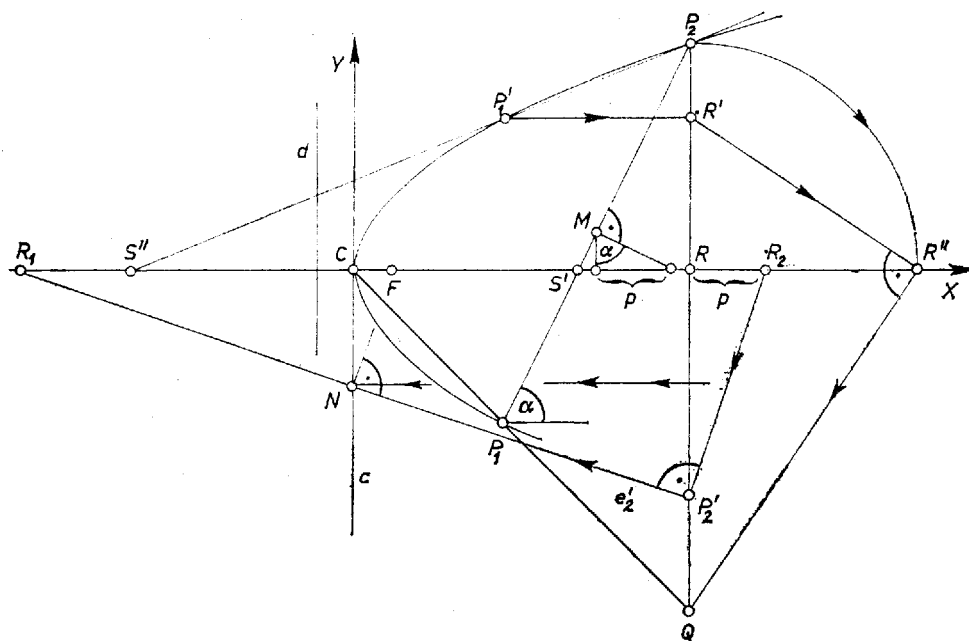
A CP_1 egyenes és a P_2 -n át t -re állított RP_2 merőleges Q metszéspontjának ordinátája

$$RQ = \frac{y_1}{x_1} \cdot x_2 = y_1 \cdot \frac{y_2^2}{y_1^2} = \frac{y_2^2}{y_1},$$

ebből Q megszerkeszthető (lásd P'_1 , R' , R''), és QP_1 kimetszi t -ből C -t.

Megjegyzések. 1. Számos más szerkesztés található a dolgozatokban p és x_i hosszának előállítására, többnyire az ún. negyedik arányos, ritkábban a derékszögű háromszögben középárányos szerkesztése, vagy Pitagorasz tétele alapján. Gyakori a segédábra használata, ilyen után a megszerkesztett szakaszt még át kell mérni a kellő helyzetbe. Többen a parabola egyenletét $y = x^2$ alakban használták és megszerkesztették az egységsszakasz hosszát, ami lényegében p szerkesztése, hiszen itt $p = 1/2$.

2. C -t a p fölhasználásával is szerkeszthetjük. Ismeretes, hogy a parabola érintője a csúcserintőből fele akkora szakaszt metsz le, mint az érintési pontnak a tengelytől való távolsága. Ezt a P'_2 pontra alkalmazva a 3. ábrán $CN = RP'_2/2$, és továbbmenve azt kapjuk, hogy az érintő t -t az R pontnak C -re vett R_1 tükrképében metszi, azaz $RR_1 = 2x_2 = y_2^2/p$. Eszerint R_1 az iménti eljáráshoz hasonlóan megkapható: $RR_2 = p$ -t fölmérve t -re (úgy, hogy $R_2P_1 > RP_1$ legyen) az $R_2P'_2$ -re P'_2 -ben állított merőleges t -ből kimetszi R_1 -et, és ekkor RR_1 felezőpontja C .



3. ábra

Eljárásunk egyszerűsíthető, észrevéve, hogy R_1 -et éppen a P_2' -beli e_2' érintővel metszettük ki, hiszen így RP_2' felező merőlegese N -ben metszi e_2' -t, R_1 előállítását mellőzhetjük, N vetülete C . – Ekkor F -et az e_2' -re N -ben emelt merőleges (ami $\parallel R_2P_2'$) is kimetszheti t -ből.

Bottyán István (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

3. Még egyszerűbb C szerkesztésére a következő eljárás. A P_1P_2 szelő egyenlete $2px - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0$, innen a szelő és a tengely S' metszéspontjának abszcisszája $y = 0$ helyettesítéssel $x' = -y_1y_2/2p$. Ebből a $P_1'P_2$ szelő S'' metszéspontjára nézve, y_1 helyére a negatívját írva $x'' = -x'$. Eszerint C a tengelyből a P_1P_2 és $P_1'P_2$ egyenesek közé eső $S'S''$ szakasz felezőpontja.