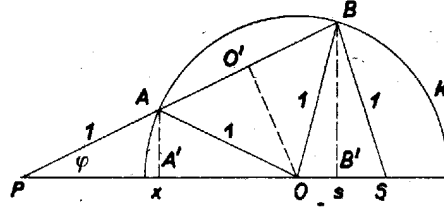


I. megoldás. a) Az ábrát az alábbiak szerint kapjuk az O középpontú, $r = 1$ sugarú k körből és az alkalmas P külső pontból kiindulva.



Legyen k és a P körüli, 1 sugarú kör egyik metszéspontja A , messe a PA egyenes k -t másodszor B -ben úgy, hogy $PB > PA$, végül messe a B körüli, 1 sugarú kör a PO szakasz O -n túli meghosszabbítását S -ben. Így POA , OSB és ABO egyenlő szárú háromszögek. Legyen még A , B és O vetülete PO -ra, ill. PA -ra rendre A' , B' , O' , továbbá $AB = y$; ekkor $PO'/PO = PA'/PA = PB'/PB$, azaz

$$\frac{1 + y/2}{x} = \frac{x}{2} = \frac{x + s/2}{1 + y},$$

mert a POO' , PAA' és PBB' derékszögű háromszögek nyilvánvalóan hasonlók. Az első két hányados egyenlőségéből

$$(2) \quad y = x^2 - 2,$$

ezt az utolsó két hányados egyenlőségébe helyettesítve rendezés után (1)-et kapjuk.

B -re addig teljesül $PB > PA$, míg PAO tompaszög, azaz míg $OAB \sphericalangle = 2 \cdot OPA \sphericalangle = 2\varphi < 90^\circ$, továbbá S -re addig teljesül $PS > PO$, míg $BOS \sphericalangle = BPS \sphericalangle + PBO \sphericalangle = 3\varphi < 90^\circ$, egybevetve, míg $\varphi < 30^\circ$.

b) A φ szög értéke egyértelműen meghatározza az ábrát, s így x és s értékét is. Az adott φ értékek mellett – amelyekre teljesül a $\varphi < 30^\circ$ feltétel – valamelyik meghatározására nyerhetünk (1)-ből egyenletet.

$\varphi = 180^\circ/7$ esetén $BSP \sphericalangle = BOS \sphericalangle = 3\varphi$, és $PBS \sphericalangle = 180^\circ - P \sphericalangle - BSP \sphericalangle = 3\varphi$, a PBS háromszög egyenlő szárú, $x + s = 1 + y$, (2) alapján

$$(3) \quad s = x^2 - x - 1,$$

és (1), így alakul:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

s -et most már számíthatjuk akár (1)-ből, akár (3)-ból, de kezdhetjük ennek kiszámításával is, ugyanis az SPB és SBO egyenlő szárú háromszögek hasonlók, mert S -nél levő szögük közös. Így

$$x + s = \frac{SP}{SB} = \frac{SB}{SO} = \frac{1}{s}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{1}{s} - s.$$

Ezt (1)-be írva, s^3 -nel végigszorozva az egyenletet és rendezve

$$s^6 - 5s^4 + 6s^2 - 1 = 0.$$

c) $\varphi = 20^\circ$ esetén $SOB \sphericalangle = 60^\circ$, tehát $s = 1$, x -re pedig (1)-ből az

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

egyenlet adódik.

*Domokos László (Tatabánya, Árpád G.)
Szeredi Péter (Budapest, II. Rákóczi F. G.)*

II. megoldás a feladat első részéhez. x és s kifejezhetők φ -vel: $x = 2 \cos \varphi$, $s = 2 \cos 3\varphi$, így (1) helyett azt kell bizonyítanunk, hogy a csupán egy változót tartalmazó

$$(4) \quad 8 \cos^3 \varphi - 6 \cos \varphi - 2 \cos 3\varphi = 0$$

egyenlőség minden φ -re fennáll – hacsak teljesül az I. megoldásban talált $0^\circ < \varphi < 30^\circ$ korlátozás –, vagyis hogy (4) azonosság. Valóban, (4) a képletgyűjteményekből ismert, de enélkül is gyorsan kiadódó

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos 2\varphi \cos \varphi - \sin 2\varphi \sin \varphi = \cos \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1) - 2 \sin^2 \varphi = \\ &= \cos \varphi (4 \cos^2 \varphi - 3) \end{aligned}$$

azonosság más alakja.

Az összefüggést a $30^\circ \leq \varphi < 45^\circ$ szögekre is kiterjeszthetjük. Ekkor célszerű az OP -vel egyirányú OS -t tekinteni pozitívnak, s így

$$x^3 - 3x + s = 0$$

áll fenn minden helyzetben.

Tiszai István (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)