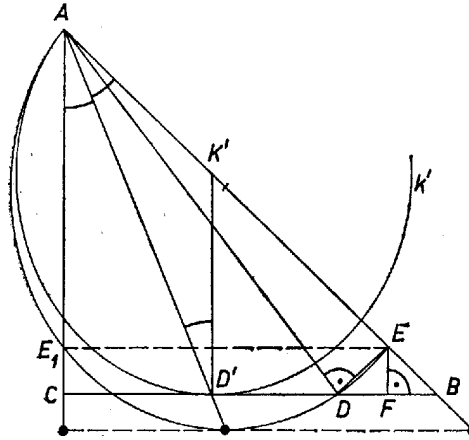


I. megoldás. Jelöljük E merőleges vetületét AC -n E_1 -gyel, ekkor $E_1E = CF$ és $AE_1E \triangle \sim ACB \triangle$, így CF ugyanakkor a legkisebb, amikor AE .



1. ábra

Az AE mint átmérő fölé rajzolt félkör átmegy a CB oldal D pontján és megfordítva, ha egy félkör AE átmérője AB -n van és a félkör átmegy BC egy D pontján, akkor $DE \perp AD$, s így E és CB -n levő F vetülete a feladatban leírt módon keletkező pontok.

Így a feladatot visszavezettük a következőre: keressük a legkisebb átmérőjű félkört, amelyiknek AE átmérője az AB egyenesen van és amelyiknek van közös pontja BC -vel. Megmutatjuk, hogy ez a BC -t érintő félkör. Húzzuk meg ugyanis egy tetszés szerinti leírt tulajdonságú félkörnek a BC -vel párhuzamos érintőjét. Ez az AB és AC egyenesekkel egy ABC -hez hasonló és azt tartalmazó háromszöget zár be; így belőle kicsinyítéssel kapjuk az ABC háromszöget és benne a BC oldalt érintő félkört. Az utóbbi félkör átmérője tehát a legkisebb a vizsgált félkörök közt, amint állítottuk. Legyen ekkor k' középpontja K' , az érintési pont D' , így $BC \perp K'D' \parallel AC$, és $AD'K'$ egyenlő szárú háromszög, ezért

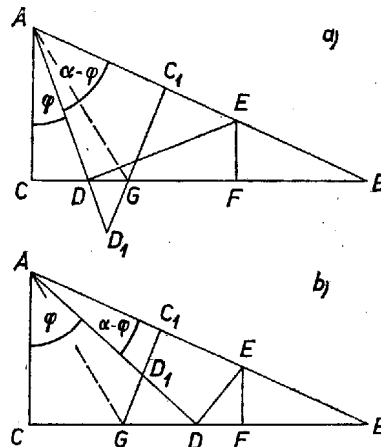
$$K'AD' \triangleleft = K'D'A \triangleleft = D'AC \triangleleft,$$

tehát a legrövidebb CF -re és legrövidebb AE szakaszra vezető D pontot a CAB szög felezője metszi ki a CB befogóból.

II. megoldás. A szerkesztés folytán DEF és ADC hasonló háromszögek,

$$DF = AC \cdot \frac{DE}{AD},$$

vagyis DF hosszát az ADE derékszögű háromszög kicsinyítésével is megkapjuk, A -ból induló befogóját AC hosszúságúnak véve, ekkor a keresett hossz a másik befogó. Egyszerűen kapjuk ezt, AC -t az AB egyenesre fölmérve, és a C_1 végpontban állított merőlegessel metszve az AD egyenest D_1 -ben; így $C_1D_1 = DF$, és $CF = CD + C_1D_1$. Ekkor a C_1D_1 egyenes a CB tükörképe a CAB szög felezőjére nézve, ezért a CB , C_1D_1 egyenespár G metszéspontja rajta van a szögfelezőn.



2. ábra

Ha D -t éppen G -ben vettük fel, akkor D_1 is itt adódik, és $CF = CD + DF = CG + C_1D_1 = CG + C_1G = 2 \cdot CG$. Megmutatjuk, hogy D minden más helyzetében $CF > 2CG$, vagyis D keresett helyzete éppen a G pont. A $CD < CG$ esetre szorítkozunk (2. *a* ábra), a $CG < CD < CB$ eset hasonló átgondolását az olvasóra hagyjuk (2. *b* ábra). $CD < CG$ miatt $CAD_{\triangleleft} < CAB_{\triangleleft}/2$, D_1 a CB -nek A -t nem tartalmazó partján adódik. A DD_1G háromszögben

$$D_1DG_{\triangleleft} = ADC_{\triangleleft} = 90^\circ - CAD_{\triangleleft} > 90^\circ - C_1AD_1_{\triangleleft} = AD_1C_1_{\triangleleft} = DD_1G_{\triangleleft},$$

ezért $D_1G > DG$, tehát $CF = CD + C_1G + GD_1 > CD + C_1G + DG = CG + C_1G = 2CG$, amit bizonyítani akartunk.

Csóka Géza (Ajka, Bródy I. g. III. o. t.)

Bottyán István (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

III. megoldás. DEF és ADC , valamint EFB és ACB hasonló derékszögű háromszögek (1. ábra), ezért $AC = b$, $CB = a$, $CD = x$, $CF = y$ és $AB = c$ jelöléssel egyrészt

$$\begin{aligned} DF &= EF \cdot \frac{b}{x}, \quad y = x + \frac{b}{x} \cdot EF, \text{ másrészt} \\ \frac{EF}{b} &= \frac{FB}{a} = \frac{a-y}{a}, \quad EF = b - \frac{b}{a} \cdot y, \quad \text{tehát} \quad y = x + \frac{b^2}{x} - \frac{b^2}{ax} \cdot y, \\ (1) \quad y &= a \cdot \frac{x^2 + b^2}{ax + b^2}. \end{aligned}$$

A törtet eltávolítva, az egyenletet 0-ra redukálva és a bal oldalt teljes négyzetté kiegészítve:

$$\begin{aligned} 0 &= ax^2 - axy + b^2(a-y) = a \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + b^2(a-y) - a \frac{y^2}{4}; \\ a \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 &= \frac{a}{4} \cdot y^2 + b^2y - ab^2 = a \left[\left(\frac{y}{2} + \frac{b^2}{a} \right)^2 - b^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} \right] = \\ &= a \left[\left(\frac{y}{2} + \frac{b^2}{a} \right)^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} \right]. \end{aligned}$$

Itt a betűk pozitív távolságokat jelentenek, tehát a bal oldal nem negatív, s így a jobb oldal sem lehet az. y értéke ugyanakkor a legkisebb, amikor a szögletes zárójelbeli első tagé, tehát amikor

$$\frac{y}{2} + \frac{b^2}{a} = \frac{bc}{a}, \quad y = \frac{2b(c-b)}{a}.$$

Ekkor

$$x = \frac{y}{2} = \frac{b(c-b)}{a} = a \cdot \frac{b(c-b)}{a^2} = a \cdot \frac{b(c-b)}{c^2 - b^2} = a \cdot \frac{b}{c+b},$$

amiben felismerjük a szögfelező lemet szette szakaszt.

Külvári István (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A fentieket megkaphatjuk trigonometriai úton is. Legyen $AC = 1$, $CAD_{\triangleleft} = \varphi$, $CAB_{\triangleleft} = \alpha$, így $DAB_{\triangleleft} = \alpha - \varphi$, továbbá $CD = \operatorname{tg} \varphi$, $AD = 1/\cos \varphi$, $DE = AD \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, $DF = DE \cos \varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, és az addíció tétellel, a nevezőben adódó szorzatot összeggő alakítva $\cos u \cos v = [\cos(u+v) + \cos(u-v)]/2$ alapján, végül a nevezőt növelve

$$\begin{aligned} CF &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(\varphi + \alpha - \varphi)}{\cos \varphi \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos(\varphi + \alpha - \varphi) + \cos(2\varphi - \alpha)} \geq \\ &\geq \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + 1} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

továbbá egyenlőség csak $\cos(2\varphi - \alpha) = 1$, $2\varphi - \alpha = 0$, $\varphi = \alpha/2$ esetén áll fönn.

Hasonlóan, valamivel egyszerűbben

$$AE = \frac{AD}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{1}{\cos \varphi \cos(\alpha - \varphi)} \geq \frac{2}{\cos \alpha + 1} = \frac{1}{\cos^2 \alpha / 2}.$$

Karsai István (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)